



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

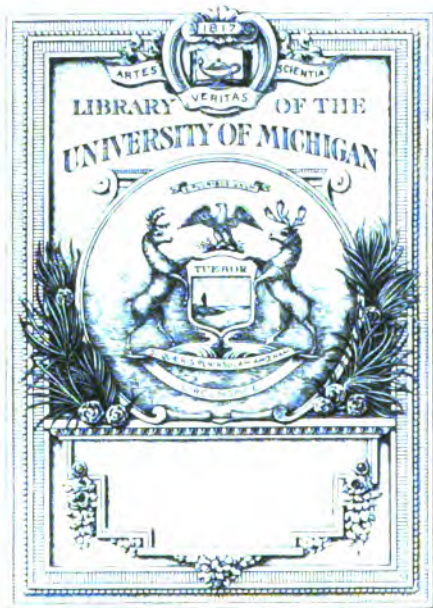
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Q
157
D14

Ab Auctore oblatus. Domini Bozgeri,
ab hac

emptus à Domino Benefhorvici.

FLORIANI DALHAM
CLERICI REGULARIS E SCHOLIS PIIIS,

ET IN

ACADEMIA SABAUDICO-LIECHTENSTEINIANA
PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS

INSTITUTIONES
PHYSICÆ

IN USUM NOBILISSIMORUM SUORUM AUDITORUM
ADORNATÆ,

QUIBUS CEU SUBSIDIUM PRÆMITTUNTUR

INSTITUTIONES MATHEMATICÆ.

Bibliotheca

Beneficentia

Scholarum

TOMUS I.

Licentia

INSTITUTIONES MATHEMATICAS, NEMPE
ARITHMETICAM, GEOMETRIAM ET TRIGONOMETRIAM
COMPLECTENS.

M DCC LII.

VIENNÆ AUSTRIÆ,
TYPIS JOAN. THOMÆ TRATTNER, UNIV. TYPOGRAPHI.

Οἱ ἐν τῇ καλλίστῃ πόλει σου, μηδενὶ τρόπῳ Γεωμετρίας ἀφίσχονται, καὶ γὰρ τὰ πάρεργα αὐτῶν ἔσμιχρά. ποῖα; ἄτε δὴ σὺ εἶπες τὰ περὶ τὸν πόλεμον, καὶ δὴ καὶ πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥστε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν πού ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ διώκει ἡμῖνος τε γεμετρίας καὶ μή. Πλάτων Πολιτ. Ζ.

Qui pulcherrimam hanc inhabitant civitatem, nullatenus Geometriæ studium intermittant; nam ne ea quidem, ceu exigua haberi debent, quæ in illa præter institutum adferuntur. Qualia? quæ nempe circa rem bellicam mox commemorabas. Quinimo quo facilius disciplinæ quævis perdiscantur, plurimum interesse scimus: imbutusne sis Geometria, nec ne. PLATO Lib. VII. de Republ.

Hist of Sci
andré
2.3-30
21206
3 vol.

S E R E N I S S I M Æ
DOMINÆ DOMINÆ
MARIÆ THERESIÆ

DUCI SABAUDIÆ,
PRINCIPI PEDEMONTII, MARCHIONI
SALUTIARUM, COMITI AUGUSTÆ
SUSSIONUM

NATÆ PRINCIPI
DE ET IN LIECHTENSTEIN ET NICOLSPURG.

D U C I
OPPAVIÆ ET CARNOVIÆ &c. &c.

ACADEMIÆ NOBILIIUM
BELLI PACISQUE ARTIBUS FLORENTIS

F U N D A T R I C I
LONGE OPTIMÆ AC CLEMENTISSIMÆ
VITAM ET FELICITATEM PERENNEM.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for the integrity of the financial system and for the ability to detect and prevent fraud.

2. The second part of the document outlines the specific procedures for recording transactions, including the use of standardized forms and the requirement for double-entry bookkeeping.

3. The third part of the document discusses the role of internal controls in ensuring the accuracy of financial records. It highlights the importance of segregation of duties, regular reconciliations, and the use of independent audits to verify the reliability of the data.

4. The fourth part of the document addresses the challenges of maintaining accurate records in a complex and rapidly changing business environment. It suggests that organizations should invest in robust information systems and provide ongoing training for their staff to stay current with best practices.

5. The fifth part of the document concludes by reiterating the importance of transparency and accountability in financial reporting. It calls for a commitment to high standards of ethical conduct and a focus on providing clear, accurate information to all stakeholders.

6. The final part of the document provides a summary of the key points discussed and offers recommendations for further action. It encourages organizations to regularly review their financial reporting processes and to seek professional advice when needed to ensure compliance with all applicable regulations.

SERENISSIMA DUX!



ITa prorsus studiorum nostrorum rationes comparatæ sunt, **DUX SERENISSIMA!** ut quæ nuper **TE** Auspice feliciter cæpta sunt, ea fervoris cursum constantissime non modo retineant; verum etiam laborum manipulos, officiis atque observantia plenifimos,

X

simos, neque etiam ab expectatione TUA alienos, in Clementissimum Tuum obtutum comportent. Si enim incredibile illud in TE extitit Principalis munificentiae ornamentum, ut consiliis supra saeculi fastigium elevatis Academiam hanc, optimarum artium feracissimum domicilium, profusis facultatibus excites, summosque jure apices intenderes: nobilem nempe juventutem ad severiores scientias & virtutes pro obsequiis Augustorum Principum & Reipublicae incolumitate informatam; an praecipuae nostrae facultates, Philosophia & Mathematica, quibus ceu generalibus praesidiis aliarum omnium disciplinarum valor atque praestantia continetur, an, inquam, aliò con-

convertere se poterant, quam ut liberalissimum suum beneficiorum fontem lectioribus, qua licebat, frondibus coronarent? præsertim cum nihil intermissum sit curæ, nihil sollicitudinis, ut meliora quæque, quæ & lucem nostrorum temporum, & eruditorum omnium expectationem sustineant, perdurante curriculi serie legerentur.

Qua quidem in re gratias, quas homo maximas potest, DEO, omnis Sapientiæ genuino Fonti, & Patri luminum agimus; primum quidem, quod nos æternis favoribus hanc in temporum periodum destinavit, qua summi Principes, translatis e Republica in restaurationem optimarum ar-

tium curis, vicario DEI munere perfunguntur, & excusso tandem veterano aurea pollicentur sæcula terrarum orbi: tum vero, quod TE nobis Fundatrice gloriari obtigerit, quæ cum avitis Profapiæ laudibus ad omnem Imperialem nutum atque Auctoritatem reverentissime movearis; ad hoc tamen institutum promovendum eo studiosius incumbas, quod non ad privatæ gloriæ incrementum, neque ad communem corporum, sed mentium felicitatem procurandam collimet.

Fulgebit DUX SERENISSIMA! fulgebit prærogativa hæc singularis Ducalia TUA inter insignia æternis splendoribus;
eos-

eosque TIBI novæ laudis titulos ad decus; aut forte etiam ad invidiam posterorum conciliabit, ut quidquid Avorum TUORUM longa series infinitis in Augustissimam Domum Austriacam meritis sago & toga obtinuit, id in Academia TUA, belli pacisque magistra, & cum emolumento publico tantopere copulata, denuò innovatum fuisse existimetur.

Respuit equidem auras has omnes populares incomparabilis modestia rarissimæ Virtutis TUÆ, quæ in beneficiorum collatione conquiescens, fluxos encomiorum vertices heroico supercilio aspernatur; verumtamen, patere DUX SERENISSIMA!

esse me præfagiendo paulisper audaciorem, nunquam id impetrare poteris, ut si suum Pergameni Attalum, si suum Mæcenatem Romani, si alii alios bonarum artium, si temporis promotores hæreditariis omnium sæculorum laudibus extulerunt, ut inquam TE non TUIS modo temporibus, sed seræ etiam posteritati lycæa statuminantem, ingrato feramus silentio præteriri, hoc præfertim excultissimo sæculo, quo ipsi Augusti Principes de rebus literariis solliciti, aperte dignitatem eorum significant, qui decus promovent literarum. Mihi Profecto tanta in TE devinctissimæ voluntatis promptitudo increvit, ut ne æneos quidem aut marmoreos colossos, quos ipsos edacis tem-
culo-

poris populatrices injuriæ tandem pessum-
dant, tantis meritis suppare existimem ; ni-
si quoque Nomen TUUM pulcherrimis
scientiis, tanquam digniori auro & cedro
inscriptum, indelebili apud posteros chara-
ctere perennet.

Suscipe igitur DUX SERENISSIMA!
levidense hoc munus, Institutiones Mathe-
maticas ceu ingressum ad Physicam severio-
rem, ex intima grati animi significatione pro-
fectum ; quod ubi intellexero solitam a TE
gratiam inivisse, incitabo vires, quæ certo
non deerunt, ut illustrius aliquando profe-
ram industriæ monumentum. Interim im-
mortalem DEUM efflictim exorabo, ut TE
fo-

fofpitem per plurium lustrorum fpacia con-
feruet, atque ex fuccefcente indies Ducali
Academia jucundiffimos faciat fructus in-
tueri.

SERENITATIS TUÆ

Humillimus & Obfequentiffimus

Florianus Dalham,
Clericus Reg. Piar. Scholarum.



RATIO OPERIS, ET INSTITUTUM.

Physicæ, quam suo ordine tractandam suscipio, Mathematicas Institutiones visum est præmittere; quod tanta sit severioris Physicæ cum Mathesi affinitas atque copulatio, ut in admirabilem naturalium corporum conditionem, a Divino Artifice productam, sine certissimis Mathematicorum principiis vetitum sit intueri. Plurima enim naturæ phænomena per motum contingunt; motuum vero leges, ac ordines a Mechanica, atque a Dynamica explanantur; igitur multo securius fuerit, in rerum naturalium investigatione Mathesim, cujus Mechanica pars est, consulere, quam formis substantialibus, aut occultis qualitatibus inconsulto inniti. Porro non fuit animus in Mathematicis hisce, quas præmitto, Institutionibus absolutum quodpiam illarum corpus adornare. Elementa solummodo in iis continentur ad Physices intellectionem maxime necessaria; ideoque etiam abstinendum fuit ab Algebraicis demonstrationibus, & conquesendum in principiis Euclidicis duntaxat, atque Archimedæis, nisi quod primis capitibus prima Algebrae elementa adsperserim; quæ tamen ab eo, qui secus agere malit, salvo operis scopo poterunt præteriri. Consultius enim putabam, principiis hisce planioribus, multoque facilioribus necessariam pandere scientiam adolescentibus, quam propositione analyti-



carum difficultatum animos eorum, plerumque laboris impatientes, a Matheseos studio abstertere; præsertim cum vastissima analyseos Provincia in pauca se constringi folia non patitur. Ex universa autem Mathesi eas partes præmisi, quæ generales quantitatis, qua continuæ, qua discretæ, leges contemplantur, & quæ Mathesis pura dicuntur: nempe Arithmeticam, Geometriam, & Trigonometriam, cum syntagmate breviusculo de sectionibus Conicis. Cæteras Matheseos partes, quæ generales hæc regulas variis materiis adplicant, veluti: Aërometricam, Mechanicam, Opticam, Dioptricam &c. ad Physicam rejeci eo ordine, quo illæ materiæ, nempe: aër, motus, lux &c. inibi recurrent. Denique tres illas generales Matheseos facultates adeo necessarias Physicas administras censebam; ut sine his nemini Physico esse liceat, nisi qui forsitan dixerit: neque motuum leges, neque accelerationem motus in gravibus corporibus cadentibus, neque antliæ phænomena, neque lucem juxta varios angulos aut reflexam, aut refractam, neque ponderum alleviationem, neque siderum motus, & sexcenta hujusmodi ad Physicam pertinere, quæ tamen omnia Matheseos subsidio eruuntur. Cæterum eo potissimum converti sollicitudinem, ut ne theoria sola, in paginis recurrens, tironum fatigaret mentes; sed potius, ut perpetua praxis, theoriæ passim intertexta, fastidium eximeret, atque etiam manifestata in communi vita harum artium utilitas animorum contentionem promoveret. Qua quidem ex re, quantum Juventus commodum perceptura sit, æquus arbiter facile judicabit.

ELEN-



ELENCHUS CAPITUM,

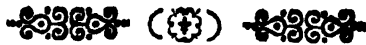
Quæ in hisce Mathematicis Institutionibus
continentur.

PROLEGOMENA.

Historica Matheseos enarratio ; ubi etiam de natura
ejusdem, præstantia, necessitate, atque de methodo
differitur.

IN ARITHMETICA.

- | | |
|--|--|
| C APUT I. <i>De Principiis Arithmeticæ.</i> | } Primis hisce capi- tibus Elementa Al- gebræ subnectun- tur. |
| CAPUT II. <i>De Numeratione.</i> | |
| CAPUT III. <i>De Additione simplici.</i> | |
| CAPUT IV. <i>De Subtractione simplici.</i> | |
| CAPUT V. <i>De Multiplicatione simplici.</i> | |
| CAPUT VI. <i>De Divisione simplici.</i> | |
| CAPUT VII. <i>Resolvuntur quædam Problemata, ope primarum quatuor simplicium specierum.</i> | |
| CAPUT VIII. <i>De Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Di- visione in compositis.</i> | |
| CAPUT IX. <i>De Fractionibus Numerorum.</i> | |
| CAPUT X. <i>De Regula Trium, & Proportionibus Numerorum ; ubi etiam de Æquatione Algebraica.</i> | |
| CAPUT XI. <i>De Regulis Societatis, Alligationis, & Falsi.</i> | |
| CAPUT XII. <i>De Extractionibus Radicum quadratarum, & cubica- rum.</i> | |
| CAPUT XIII. <i>De Computo Decimali.</i> | |



IN GEOMETRIA.

CAPUT I. *De Principiis Geometriæ.*

CAPUT II. *De Dimensione Linearum.*

CAPUT III. *De Angulis.*

CAPUT IV. *De Triangulis.*

CAPUT V. *Præcipua Instrumenta Geometrica referuntur, methodusque exponitur, Geodæsiam præctice exercendi.*

CAPUT VI. *De Quadrangulo, aliisque Polygonis.*

CAPUT VII. *De Circulo, aliisque Figuris curvilineis.*

CAPUT VIII. *De variis Epipedometriæ speciebus.*

CAPUT IX. *De Metamorphosi superficierum.*

CAPUT X. *De Stereometria, seu solidorum Dimensione.*

CAPUT XI. *Reliqua de Sphæra expediuntur.*

CAPUT XII. *De Inventione Soliditatis diversorum corporum.*

CAPUT XIII. *De variis Stereometriæ speciebus.*

CAPUT XIV. *De Metamorphosi Stereometrica.*

CAPUT XV. *De Conicis Sectionibus.*

IN TRIGONOMETRIA.

CAPUT I. *De Principiis Trigonometriæ.*

CAPUT II. *De Inventione Sinuum tangentium, & secantium.*

CAPUT III. *De Logarithmis, & Tabularum usu.*

CAPUT IV. *De Analyfi Triangulorum rectangulorum.*

CAPUT V. *De Analyfi Triangulorum obliquangulorum.*

CAPUT VI. *Problemata Euthymetrium, Altimetrium, & Bathymetrium spectantia, Trigonometriæ beneficio resolvuntur, & mappæ Geographicæ tam universales, quam particulares adornantur.*

CAPUT VII. *De Trigonometriæ sphærica.*



INSTITUTIONUM MATHEMATICARUM PROLEGOMENA.

Historica Matheſeos enarratio ; ubi
etiam de natura ejusdem , præſtantia , neceſſitate
atque de methodo diſſeritur.

I.



MATHEſIS eſt ſcientia quædam generalis , quæ
circa quantorum definitionem occupatur. Quan-
titas autem , cum in omnibus corporibus
hujus univerſi recurrat ; cumque ceu lym-
pidiſſimus fons veritatibus plurimis abun-
det , ac vagis juribus per alias artes ſit
diffuſa ; inde factum eſt , ut *Matheſis* a ve-
tuſtiſſimis ſapientibus non modo generale
nomen ἀπὸ τῆ μαθητικῆς indepta ſit , atque κατ' ἐξοχὴν *diſciplina* , ſeu
inſtitutio dicatur ; verum etiam ob immenſum rerum infin-
itarum complexum *Divina Scientia* encomium præferat. Cer-
te *Sap. ii. v. 21.* a ſacro Scriptore dicitur Deus πάντα μέτρον , καὶ
ἀριθμῶν , καὶ ῥαθμῶν διέταξε in *menſura* , numero & *pondere cuncta diſpoſuiſſe* ;
inter profanos autem ſapientes tanti ſemper habita eſt , ut di-
vinus *Plato* : *Deum Geometriam exercere* , dictaret : ὁ Θεὸς γεωμετρῶν .
Ipſeque *Cicero* lib. 2. *Academ. Quæſt.* edixerit : *ex numeris & Ma-
thematicorum initiis proficiſci omnia.*

*Origo Mathe-
sificos.*

II. Hujus itaque præstantissimæ facultatis originem ut texam, & ejusdem fata etiam pernici, quam licet, stilo decurrant: videtur *mathematicarum disciplinarum* initium ad ipsa mundi esse incunabula referendum; *Adamus* quippe, humani generis proto-parens, & hujus filius *Seth* Astronomica claruisse scientia referuntur a *Josepbo* lib. 1. *antiq. Jud. Cap. 2.* tantaque erat primorum Patriarcharum in hac contentio, ut *Mathefis* non immerito ex sententia Flavii Josephi sapientia antediluviana foret nominanda.

Fabulæ tamen loco illud haberi debet, quod idem *Josepbus* ibidem narrat de Sethi nepotibus: eos nempe *Adami* vaticinio de duplici mundi excidio, altero per aquarum, altero per ignis diluvium futuro, præmonitos, duas columnas lateritiam, & lapideam erexisse: his inscripsisse arcanam suam de sideribus scientiam: ut ingruente aquarum illuvione observationes illæ in lapidea columna, grassante autem universali incendio in lateritia columna posteris conservarentur: Nam nullum sincerum testimonium huic narrationi suffragatur, videturque *Josepbus* in *anachronismum* lapsus fuisse & columnas a *Seth* Ægypti rege in *Seriadica* terra positas, Patriarchæ Setho, aut *Sethianis* nepotibus perpetuam attribuisse. *Henochus* *Architectonicam* promovit, primamque civitatem, dictam *Henochiam* ædificavit. *Gen. 4. v. 7.* *Jubal* excoluit *Muscam*. *Nautices*, & per consequens *Hydrostatices* Noëmus in constructione arcæ insignia protulit argumenta, atque etiam elapsam Patrum suorum ætatem, dierum & mensium calculum, anni denique diluvio durante periodum *Chronologicis* legibus supputavit. Nihil aliud hæc omnia sunt, nisi *Mathefis* perpetua, & *dimensiones* variis materiis applicatæ; Quamvis, re ad crism revocata, dicere liceat: veteres illos Patriarchas non tam artis directione, quam luminis naturalis consilio in operum illorum constructione usos fuisse; & *Josepbum Flavium* partium studio abreptum, ad gloriam duntaxat suæ gentis evehendam, *Astronomiæ* originem refudisse in *Adamum* & *Sethum*; cum tamen in sacris literis nihil ejuscemodi deprehendatur. *Prolegom. Physica num. X. XI.*

III.

III. Post diluuium a *Noemi* nepotibus fertur *Matheſis* inter *Aſſyrios* & *Chaldæos* fuiſſe propagata ; *Turris* quippe illa in campo *ſennar*, & molis magnitudine, & ædificantium ſcopo, ante illum diem inaudita, ſine menſuris examuſſim coordinatis nullatenus excitari poterat. Tum *Zoroaſtres*, non ille quidem *Bactrianus*, a *Nino* deſcendens, ſed alter *Zoroaſtres* *Chaldæus* *ſcientiam ſideralem & magicam* apud *Babylonios*, protulit, cujus diſcipuli antiquiſſimi, & ſucceſſores a *Plinio lib. 30. cap. 1.* & *Strabone lib. 16.* inſinuantur *Azonaces*, *Cidenas*, *Naburianus*, *Sudinus* : *Aſtologia* quippe, præſertim *Judiciaria*, occupandis hominum animis, & texendis fraudibus peropportuna, facile ſuperſtitioſo aſtrorum, ſeu falſorum deorum cultui, quem nomine *magia* (*θεων θεφαρεια*) intelligit *Plato in Alcibiade*, plebeculæ animos illigavit.

Beroſus antiquiſſimus ſcriptor apud *Joſephum lib. 1. antiquit. Judaic. cap. 7.* dicit : apud *Chaldæos* circa illud tempus floruiſſe virum *τα ερανια επιειρον rerum caeleſtium peritum*, per quem *Joſephus* *Abrahamum* terræ *Chaldææ* indigenam, atque ex *Ur* oriundum ſignificari pertendit. Idem *Joſephus* exiſtimat : ab eodem *Abrahamo* ex *Chananæa*, urgente fame, in *Ægyptum* abire compulſo, *Ægyptios* *Aritbmeticam & Aſtronicam* fuiſſe edoſtos. Sed & ruruſ hic videtur *Joſephus* gentis ſuæ plus æquo ſtudioſus. Ut ut eſt, plurimorum ſcriptorum conſenſione *Ægypti* primi feruntur *Matheſim* certis legibus certaſque methodo digeſſiſſe : fortalliſ non tam aliorum præceptis, quam neceſſitatis imperio ad hoc inducti. *Nilus* namque, ut eſt apud *Herodotum*, frequenti exundatione diffuſus agrorum limites abolevit ; ideo læſi poſſeſſores Regis *Judicium* implorarunt ; hic autem miſſis arbitris, *menſurandi ſcientia* præditis, juſ ſuum cuique poſt veſtigialiſ perſolutionem rependit. Atque ſic *Geometria* ſenſim eos gradus conſcendit, ut, cum *Matheſeos* pars tantummodo ſit, pro ſua excellentia, generali nomine *Matheſis* nuncupetur. *Ariſtoteles* quoque *lib. 1. Metaph. cap. 1.* diſerte aſſerit ; *Mathematicas artes* ab *Ægyptiis* Sacerdotibus fuiſſe inventas. Itaque *Ægyptus* *Geometrica facultatiſ* præſtantia toto orbe celebrabatur, adeo, ut

ut exterarum gentium homines, quorum animi honestissimarum artium amore jucundius ardebant, longis itineribus in Ægyptum commearent, & vicini præsertim Græci *Mathematicis* spoliis inde trans mare abductis Patriam suam locupletarent.

IV. THALES primus Græciæ sapientum, suscepto in Ægyptum itinere *Mathematicas* disciplinas ab Ægyptiis Sacerdotibus didicisse perhibetur apud *Diogenem Laërt.* in *Vita Thaletis*; Cujus quidem eruditionis haustæ specimen non vulgare protulit, cum Ægyptias Pyramides mensuravit ex earum umbra, & solis ortum, atque occasum definivit justis recursibus: rationes etiam solaris, & lunaris magnitudinis inivit: quodque, ut *Plutarchus* adjicit *de Placit. Philos. lib. II. cap. 24.*, veras eclipsion eruerit causas. In semicirculo præterea innumera contineri triangula reperit Thales; atque ob id diis fertur bovem immolasse. Quibus sane factum est, ut *Thales Mathematicos* fama in Græcia primus omnium maxime clareret tempore *Astyagis* Medorum Regis, sexcentis prope ante Christum natum annis. Huic in Jonica schola successit *Anaximander Milefus* tempore Cyri Persæ. *Gnomonicam* ille artem præclarissimo invento in lucem eduxit teste *Laërtio* in *ejus vita*, & quod *Plinius* adjungit *lib. 2. histor. Natural. Cap. 8.*: globum terraqueum sphaerica figura expressit, & obliquo Zodiaco, seu Ecliptica interdistinxit; cum ante *Anaximandrum* sphaera, ab *Atlante* inventa, meris parallelis constaret. *Anaximandrum* ejusdem scholæ moderatores exceperunt: *Anaximenes*, *Anaxagoras*, *Archelaus* studiosissimi omnes *Matheseos* excultores.

V. PYTHAGORAS Samius, *Pherecydis* Syri discipulus, hortatu *Thaletis* in Ægyptum abscessit, inibique a Sacerdotibus Memphis, & Diospoleos *arcana Mathematicos*, cujus incredibili amore tenebatur, fundamenta jecit. Eum ait *Porphyrius* in *vita Pythagora*, post variarum gentium perlustrationes, a Phoeniciis demum *Aritbmeticam*, ab Ægyptiis *Geometriam*, a Chaldæis *Astronomiam* reportasse, cum alio etiam tempore *Muscam* a Per-
sarum

farum *Magis* didicisset. Redux in Patriam suam *Samum*, odio *Polycratis* Tyranni, se in suburbanum speleum abdidit, & *Politiæ*, atque *Astronomiæ* se totum impendit. Tandem *Tarquinius superbi* temporibus in eam devenit Italiæ partem, quæ hodie *Calabria*, olim *Græcia magna*, dicebatur, atque Italicæ sectæ dedit originem. Incomparabili huic *Mathematico* acceptum referimus *triangulum rationale rectangulum*. Item inventum illud dignum hecatombe: *quadratum hypotenusæ esse æquale duobus quadratis Catheti, & basos. Tabulam Pythagoricam. Regulas Symphonia musicæ*; Cum alias etiam terram in medio universi, nobisque oppositos *Antichthonas* statuisset a *Laërtio* perhibeatur. Hunc in schola Italica fecutus est *Ocellus Lucanus*, *Archytas Tarentinus*, qui *Mechanicam* luculente promovit, ut ex volante illius columba patescit apud *Gellium Lib. 10. Noct. Attic. cap. 12.* Item *Philolaus Croton.* aliique.

VI. In Eleatica schola *Parmenidas* Mathematicus floruit, & primus, ex *Laërtio in ejus vita* Phosphorum & Hesperum idem esse fidus nempe Venerem detexit.

Xerxis Persarum Regis temporibus *Democritus Abderites* ad Chaldæos, Arabas, Ægyptios & ultimorum Indorum *Gymnosophistas* profectus, tantum in *Geometricis disciplinis* profecit: ut apud *Clementem Alexand. lib. 1. Strom.* de se libere fateatur, *componendis demonstratione lineis nemo me adhuc superavit; ne quidem qui Ægyptiorum vocantur Arpedonapta.* Hunc *Strabo* inter primos *Geographia* parentes reponit; ejusque *mathematica opera* *Laërtius* sequentia enumerat: *de contactu circuli, & sphaera. De Geometria & Geometricorum numeris. De mutis, & solidis lineis. De agricultura, seu Geometricus. De Pictura. De Cosmographia. Magnus annus, seu Astronomia. De sideribus vagis. Diacosmus major, & minor.* In quo postremo libro *Nautica* plurimum illustratur. *Democrito* in sua schola successerunt *Protagoras, Metrodorus Cbius* aliique.

VII. PLATO exemplo *Pythagoræ* in Ægyptum profectus, ibidem *Aritmeticam & Geometriam* edoctus est. Vidisses eum,

in patriam reversum, *Geometriam* tam necessariam facultatem suspexisse, ut hanc *Academia* suæ foribus epigraphen inscripserit: ἡδεῖς ἀγεωμήτρως εἰσὶτω. *Nemo Geometriae ignarus ingrediatur.* *Vitruvius Architect.* lib. 9. cap. 1. refert: singularem quempiam modum mensurandi agros a *Platone* esse inventum. Quantum autem in *Geographia* valuerit, testatur ejus *Atlantica*, ultra *Columnas Herculis* sita, quam in *Timæo* scribit majorem fuisse *Lybia*, & *Asia*; tandem vero submersione nostri Orbis communicationi ereptam. Neque defunt eruditi *Scriptores*, qui *Atlantica*, vel *Atlantis* nomine *Platonis* intellectam fuisse *Americam* conjiciant, sæculorum vicissitudinibus oblitteratam; maxime cum *Laërtius* *Platonem*, & *Antipodas* adstruxisse asseveret. Cæterum vel id solum summa *Platonis* in *Mathesim* merita abunde comprobant, quod *Cicero de Finibus* dicit: *Plato* in *Musica*, *Geometria*, *numeris*, & *astris* se contrivit.

VIII. *ARISTOTELES* quoque *Platonis* discipulus, *Alexandri M.* Præceptor, non postremam *Mathesi* operam addixit; dicebat quippe: scire, quod res aliqua sit, ad eos pertinere, qui sensibus tantummodo nituntur: at vero, quare res aliqua sic se habeat, id scire proprium esse officium *Mathematicorum*, *Mathematicon* a *Laërtio* scripsisse fertur. *Vossius* Cap. 26. de *scient. Mathem.* addit: *Aristotelem* quoque de *Musica*, *Optica*, & *Astrologia* scripsisse, qui tamen libri injuria temporum perierunt.

Porro, cum tam *Plato*, quam *Aristoteles* placita sua *Geometricis* potissimum ament *ratiociniis* comprobare, liquet exinde: ante omnes alias facultates *Geometriam* adolescentibus tradere, in more positum fuisse *Græcis*. Hinc *Plato* passim vocat *Geometriam* προπαιδείαν *primam Institutionem*. Quod autem ex tam fecundis *Geometriæ* fontibus subsequentes scholastici nil *Geometricum* in sua scripta traduxerint, id inde est: quod, barbarie literarum dominante, sola fere *logomachia* contenti, sublimiora in antiquis *Philosophis* sapientiæ neglexerint intueri arcana.

IX. EUCLIDES, alius ab *Euclide* Megaricæ festæ Institutore, tempore *Ptolomæi Lagi*, trecentis prope ante Christum annis, *Geometria* laude claruit, atque Alexandriæ scholam *mathematicam* fundavit. Notos Elementorum tredecim libros, quibus Juventus hodiedum passim imbuitur, edidit, in quibus aliorum inventa collegit, auxit, suisque demonstrationibus roboravit. *Hypsicles* tredecim illis libris decimum quartum, & decimum quintum, ac nuper *Franciscus Fluffates Candalla* decimum sextum adjecit. Hoc *Euclide* auctore tantas Alexandriæ radices *Geometria* egit, ut ex mente *Vossii Cup. 15. de scient. mathem.* nongentis prope annis, ab hoc *Euclide* nimirum usque ad Arabas, & Saracenos Geometras, nullus fere Geometriæ laude floruerit, qui Alexandriæ aut natus non fuisset, aut saltem studiis ibidem non vacasset. *Euclidis* discipulus *Apollonius Pergæus* septem Conicorum subtilissimos libros, partim ex *Archimedis* doctrina, partim proprio ex cerebro procudit. Unde *magnus Geometra* dici meruit.

~~X.~~ ARCHIMEDES centum circiter annis post Euclidem vixit. Hic summo adminiculatus ingenio eo devenit, ut omnis *mathematicarum disciplinarum* præstantia in eum immigrasse uno omnium ore diceretur. Cum *continentem rationem* sphaeræ ad cylindrum invenisset, nempe: ut 2 ad 3, tantum voluptatis percepit, ut sphaeram cum cylindro ejusdem diametri, & altitudinis tumulo suo superimponi voluerit memoriæ causa. Pauca ex *Archimedeis* scriptis, hæcque eruditionis plenissima, ad nos pervenerunt.

Græcis tandem in Romanorum potestatem redactis, visi sunt amissa libertate gentis acutissimæ animi, simul & *mathematicæ disciplinæ* nutare. In Ægypto feliciter aliquanto res se habuerunt; Anno siquidem Christi septuagesimo natus est *Claudius Ptolomæus* princeps omnium, qui hætenus extiterunt, astronomorum. Systema ille mundanum, ab eo *Ptolomæicum* dictum. coordinavit, atque alia complura *Matheseos* evulgavit specimina.

Juliano Apostata regnante vixit *Diophantes Alexandrinus*, qui 13. de *Arithmetica* edidit libros. Floruerunt præterea *Anatolius Laodicensis*, *Pappus* & *Theon Alexandrinus*, cujus filia *Hypatia* in *Apollonium* & *Diophantem* commentaria adornavit. *Proclus* item *Lycius*, qui anno Christi 485. e vivis excessit; & alter quidam *Proclus Mathematicus*, qui serius, nempe sub annum Christi 514. *Vitaliani*, Constantinopolim obsidentis, classem speculis causticis incendisse fertur.

XI. Interea temporis varia *Matheseos* fortuna revolvitur apud Romanos: *Varro* quippe de *Arithmetica* librum scripsisse perhibetur apud *Censorinum de die Natali Cap. 2.* *Frontinus* etiam *geometricos* libros *Varroni* attribuit. *Boetii* de *Arithmetica* libri adhucdum supersunt. Præsertim vero *Architectonica* apud Romanos splendorem nominis est affecuta, cujus uberrimum testimonium in *Vitruvii Pollionis* decem libris ad nos usque est propagatum. Paucio tempore interjecto Imperatores *Tiberius*, *Vitellius*, & *Domitianus* Mathematicos persecuti sunt, ut habet *Jonsius de scriptorib. Philos. lib. 1. Cap. 17.* eo quod impostores quidam pulcherrima scientia ad vanas divinationes, cæremonias vetitas, atque ad maleficia infanda abuterentur; quare etiam iniquior *Matheseos* conditio esse coepit, ita ut pauci admodum animos ad eam adjicerent.

XII. *Diocletiani* quidem, & *Maximiniani* temporibus videbatur *Geometria* firmiter præsidium obtinuisse, cum Augusti illi edicerent: *Artem Geometriae discere, atque exercere publico interest. l. 2. Cod. de malef. & mathem.* At brevi post sæcula barbara inceperunt, & in occidente quidem *Vandalorum*, *Gothorum*, *Hunorum*, *Herulorum* atque *Longobardorum* excursionibus omnia pessumibant; in oriente vero *Bulgarorum* atque *Saracenorum* deprædationibus optimæ artes prostratæ una cum *Geometria* misere jacebant; his tamen ipsis temporibus sæculo Christi nono floruit *Leo Mathematicus*, qui hac etiam de causa a *Theophilo* Imperatore Constantinopolitano singularem beneficentiam est expertus.

XIII. Ast mirum dictu est, per ipsas barbarorum vastationes *Mathesi* incrementum accessisse; Arabes enim, & Saraceni, in Græcorum, Romanorumque ditiones effusi, in complura *Geometrica* monumenta inciderunt, eorumque præstantiam, & utilitatem cum percepissent, tanto studio eidem vacaverunt, ut *Geometricos* libros non paucos in Arabicam linguam transtulerint, & *Mathematici* etiam ipsi extiterint, præsertim sub *Calissa Almamons* circa annum Christi 900. *Characteres arithmeticos*, si non penitus adinvenerunt Arabes illi, & Mauri, saltem eorum usum in *Arithmetica* induxerunt; cum antehac literis duntaxat Græci æque, ac Latini numeros exprimerent. A Mauris usus horum characterum in Hispaniam primum circa annum Christi 1100, tum ad alias gentes est propagatus; Quamvis hodierni nostri characteres a figura illa primæva Arabica nonnihil abscefferint, ut ex vetustissimis codicibus fit palam.

Denique exulceratis illis temporibus Itali, ob mercaturas cum Ægyptiis, Indis, Germanis &c. susceptas *Arithmetica* utcunque coluerunt; donec tandem sæculo decimo quinto ineunte Cardinalis *Nicolaus Cusanus*, pro *mathematicarum* disciplinarum bono natus, veternum excutere, & primævum pulcherrimis facultatibus splendorem vindicare cœpit. *Geometriam* præsertim promovit, & *Arithmetica*; quem subsecuti *Georgius Peurbachius*, & hujus discipulus *Joannes Müllerus*, alias a patria sua *Regiomontanus*. Hic construxit *Tabulas sinuum*. *Erasmus Reinholdus Tabulas tangentium*, *Tabulas secantium* *Joachimus Rheticus*. *Logarithmos* pro maximo *Trigonometria* emolumento, incredibili cum solertia, supputavit *Joannes Neperus* Baro a Merchiston Scotus; & hoc quidem podagricos inter singultus fallendi temporis causa. *Franciscus Vieta Algebra* perpolvit, quam *Cartesius*, *Newtonus* & *Leibnicius* ad apicem prope evexerunt, alique innumeri ex Recentioribus, quorum mirificis studiis factum est, ut ætas hæc nostra non modo *mathematicarum* artium gloria antiquorum felicia sæcula adæquasse;

verum etiam sat luculento discrimine antecelluisse videatur. Atque hæc de historia *Matheſeos* delibasse ſufficiat.

Partes XIV. Dividitur *Matheſis* bifariam: in *puram*, & *mixtam*.
Matheſeos. *Pura* ſeu abstracta eſt, quæ quantitatem, illiusque affectio-
 nes contemplatur, a materia ſeparatas, v. g. *angulum concurſus*
duarum reſectarum linearum productum. *Mixta*, ſeu applicata eſt,
 quæ leges a *Matheſi* pura propoſitas variis quibusque mate-
 riis applicat v. g. quod angulus lucis reflexæ ex radio lucis,
 & plano, in quod radius incidit, cooriatur. Rurſum *Puræ*
Matheſeos tres ſunt partes, nempe: *Arithmetica*, *Geometria*, & *Tri-*
gonometria.

Arithmetica, cui etiam *Algebra*, ſeu *Matheſis ſublimer* adjici
 ſolet, *quantitatem diſcretam*, ſeu numeros perfequitur. *Geome-*
tria quantitatem continuam, nempe lineas, ſuperficies, & corpora.
 Dimenſio linearum vocatur *Euthymetria*, ſuperficerum
 tandem, & corporum dimenſiones *Epipedometria*, & *Stereometria*
 vocitantur. *Trigonometria* eſt ſcientia *metiendi omne genus trian- gulo-*
rum, ſeu per ſinus, & tangentes, ſeu per eorum logarithmos,
 ut infra dicetur. *Mixta Matheſeos* partes enumerantur: *Mechanica*,
Aërometria, *Hydroſtatica*, *Optica*, *Dioptrica*, *Catoptrica*. *Gnomonica* &c.

Utilitas, XV. Jam vero utilitatem, præſtantiam, ac neceſſitatem
atque ne- *Matheſeos* quod ſpectat; præterquam quod nemo unus morta-
ceſſitas lium inveniatur, cui neceſſum non ſit ſæpius cum numeris
Mathe- agere, magnitudines rerum, figuras, ac proportiones ſuum
ſeos. ob finem internoscere, ac dimetiri; etiam intellectum ſcientia
 hæc magnopere exacuit adoleſcentibus, atque ad perſpicien-
 das abditas ſubtilitates viam aperit, ac manuducit. *Proclus* ſane
Lib. I. Comment. in Eucl. ſic de *Matheſi* loquitur: 'Εκφαντικὸν τῶν κατ'
 εἰς αὐτὴν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἶδαν, λήθης δὲ ἢ ἀγνοίας ἀφαιρέτικον, ὡν ἀπὸ τῆς
 γενέσεως ἔχομεν, ἢ ἀπολύτικον τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας διουμένων, κατὰ τὸν Θεῶν,
 ὄντως τὸν τῆς ἐπιπέδου ἐφορῶν, ὃς προάγει μὲν εἰς τὸ ἰμφανὲς τὰ νοεῖα δῶρα,
 πληρεῖ δὲ παντῶν τῶν Θεῶν λόγων, κινεῖ δὲ τὰς ψυχὰς ἐπὶ τοῦ, ἢ ὡς περ
 ἐκ

ἐκ κείνῃ Βαβίος ἀνεγείρει, διὰ ζήτησεως δὲ ἐπίσσεφει πρὸς αὐτάς, ἢ διὰ μαθηματικῆς τελειότητος, ἢ διὰ εὐσεύσεως τῆ καθαρῆ πρὸς τὴν μακαρίαν ζωὴν. *Insitam movet cognitionem, & promit formas, que nobis secundum essentiam insunt; aufert oblivionem, atque ignorantiam, qua nobis ab ortu nostro innata sunt: Solvit vincula, qua ab irrationalitate proveniunt, ad Dei plane similitudinem, hujus scientia præfidis; qui intelligentia munera manifestat, & cuncta Divinis complet rationibus: animas quoque ad mentem erigit, ac velut e profundo exsuscitat sopore: Inquisitione ad seipsas convertit, ad jucundiorum vitam deducit.* Profecto Theologis ipsis non raro *Mathesis* frequentata est, in Paschatis juxta phases lunæ exacte ordinandi laboribus, & in compluribus S. Scripturæ difficultatibus: veluti de Magorum stella: Eclipsi mortem Christi subsequuta &c. enodandis; ut non immerito *Origenes* apud *Eusebium* lib. 6. *hist. Eccl. Cap. 13.* ad sacra studia idoneos in *Arithmeticis* & *Geometricis* solerter exerceret.

Quod Medicis quoque *Mathematica* sit perutilis, innuit Medicorum Phoenix *Hippocrates* in *Epistola ad Thessalum filium*, ubi eadem *Arithmetica*, & *Geometria* impense commendat. Denique vulgares plurimi artifices in *Geometricorum* instrumentorum: circini, linealis &c. usu omnem operum suorum concinnitatem, & certitudinem reponunt. Velim autem *Geometria* tiro-nes cum primis admonitos, ut ubi theoreticam aliquam ex his Institutionibus præceptionem legerint, aut explicari audierint, illico adhibito circino, aut alio competente instrumento figuras in chartis delineent; nam ejuscemodi exercitiis multo illustrius variæ proportionēs, ac combinationes in mente defiguntur, atque etiam ad *Geometriam Practicam* jucunda parabitur accessio.

Methodus, secundum quam *Mathematica* disciplinæ ordinantur, in eo tota posita est, ut a primis simplicissimis notitiis perveniatur ad ignota, & composita, atque ut *Proportiones* certis tantummodo, & exploratis principiis inædificentur, utque nihil omnino admittatur, nisi quod ex ratiocinio infallibili sit deductum. Sunt autem Principia *Matheseos*; *Definitiones*, *Axiomata*.

mata, & Postulata. *Definitiones* rei notitiam congruis terminis manifestant. *Axiomata*, seu notiones sunt propositiones theoreticæ, quarum veritas ex sola terminorum inspectione patescit, v. g. *Totum est majus sua parte.* *Postulata* sunt quædam tam facilis operationis, ut frustraneum foret ea multis demonstrare v. g. *a puncto ad punctum lineam ducere.* *Postulata* igitur ad practicam Matheos partem pertinent: *Axiomata* ad theoreticam.

Propositiones demonstrandæ aliæ sunt *Theoremata*, aliæ *Problemata.* *Theorema* est speculativa propositio, in qua de re jam formata, aut descripta differitur, illiusque rei proprietates per *Definitiones, & Axiomata* demonstrantur. *Problema* est Propositio, per quam aliquid a *Geometra* efficiendum, vel describendum proponitur.

Lemma, quod *Cicero* vocat *Præsumptionem*, est propositio speculativa, quæ, cum propositioni quidem principaliori demonstrandæ deserviat, commode tamen citari non possit, præmittitur eidem propter ordinatam seriem.

Hypotheses sunt arbitrariæ positiones, quibus ostenditur: quam ratione praxim aliquam commodius instituere oporteat, vel phænomenorum singularium explicationes adornare.



INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

§. 1. **A**rithmetica est scientia supputandi, atque ex datis numeris alium incognitum eliciendi.

SCHOLIA.

§. 2. **P**ertractantur in Arithmetica quantitates discretæ, seu numeri, horumque natura, & proprietates demonstrantur.

§. 3. **N**umeri in computis adhibentur loco rerum, eo quod ipsas res adferre sæpe aut nolimus, aut nequeamus. Infallibilia tamen Arithmeticæ principia illud præstant, ut eorum beneficio ignotos numeros multo certius, & felicius erueamus, quam si res ipsas præsentibus numerando, sensibus nostris uteremur.

DEFINITIO II.

§. 4. **U**nitas est principium numeri simplex, & inextensum; non vero numerus dici potest, cum discrete extensa non sit; multiplicatis enim diversimode unitatibus diversus confurgit numerus.

S C H O L I A.

§. 5. **A**B ultima unitate singuli numeri speciem suam desumunt. v. g. ternarius a tertia unitate claudente duas alias unitates.

§. 6. **N**Otæ numerorum, seu characteres ab omnibus prope gentibus adhibentur sequentes: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. ferunturque ab Arabibus ad Europæos esse delati. Proleg. XIII.

D E F I N I T I O III.

§. 7. **Æ**QUALIA sunt, quæ ejusdem omnino sunt quantitatis: inæqualia vero sunt, quæ diversam quantitatem habent.

A X I O M A I.

§. 8. **I**DEM numerus sibi ipsi æqualis est. Potestque diversa ratione prodire v. g. 8: addendo insimul 2 & 6, 4 & 4, 5 & 3 &c.

Item subtrahendo 2 a 10, 3 ab 11. &c. multiplicando 4 per 2, dividendo 24 per 3, 16 per 2 &c. Quomocunque autem producat, semper sibi æqualis est, habet enim semper eandem quantitatem discretam.

A X I O M A II.

§. 9. **Q**UÆCUNQUE eidem tertio sunt æqualia, sunt etiam æqualia inter se; ideoque unum in alterius locum substitui potest.

Sint tres catervæ militum Cæsareanorum, quarum singulæ 150. pedites contineant; prima, & tertia erunt æquales secundæ, atque ideo prima, & tertia æquales inter se.

A X I O M A III.

§. 10. **S**I æqualia æqualibus addas, prædeunt æqualia: si vero æqualia ab æqualibus auferas, rursus æqualia remanent.

Sint duo greges, quorum alter 50 equos, alter 50 oves contineat; adice æqualiter huic 30 oves, illi 30 equos, erunt numero 80 æquales. Iterum deme æqualiter priori 30 equos, posteriori 30 oves, erunt iterum numero 20 æquales.

A X I O M A IV.

§. 11. **S**I æqualia per æqualia multiplicentur, prædeunt æqualia; si æqualia per æqualia dividantur, prodibunt rursus æqualia.

Sit calix aureus appendens 3. libras auri: sitque alter calix argenteus pariter 3 libras argenti appendens. Multiplicetur calix aureus per 3, ut sint 3 calices aurei æquales, prodibunt 9 eorum libræ auri; calix quoque argenteus multiplicetur per 3, ut sint 3 calices argentei æquales, prodibunt eorum 9 libræ argenti. Si rursus 9 libras auri, & argenti in tres calices æquales auri, & argenti diviseris, erunt singuli, & aurei, & argentei calices 3 librarum.

A X I O M A V.

§. 12. **S**I & majori, & minori numero æqualia addantur, prodibunt æqualia; si vero majori, & minori æqualia demantur, rursus prodibunt inæqualia.

Si calici aureo trium librarum, & argenteo calici 5 librarum æqualiter 2 libras olei infundas, efficient numerum inæqualem librarum; calix namque aureus 5 libras appendet:

argenteus 8. Effunde e calice aureo 3. librarum, similiterque e calice argenteo 5 librarum 2. libras olei, erunt numero librarum inæquali: aureus nempe 3, argenteus 5 librarum.

A X I O M A VI.

§. 13. **S**I & major, & minor numerus per æqualia multiplicetur, prodibunt inæqualia; sin vero per æqualia dividantur, rursus prodibunt inæqualia.

Appendat calix aureus 3 libras, & alter argenteus libras 5. multiplica & aureum calicem, & argenteum per 3, ut sint 3 calices aurei, & 3 argentei, singuli in sua sorte æquales; erunt trium calicum aureorum libræ 9 auri; trium vero argenteorum libræ 15. Divide libras 9 auri, & 15 argenti in tres æquales calices aureos, & argenteos; singuli aurei appendent 3; singuli vero argentei 5 libras.

COROLLARIUM I.

§. 14. **I**dem numerus inæqualis prodit, si æqualia per inæqualia multiplices, aut dividas; Quod si vero inæqualis per inæqualem multiplicetur, provenit quandoque numerus æqualis, quandoque inæqualis v. g. multiplica numerum 4 per 3, & inæqualem numerum 6 per inæqualem 2, prodibit utrinque numerus æqualis nempe 12. Iterum multiplicetur numerus 4 per 2, & inæqualis 6 per æqualem 2, prodibunt utrinque numeri inæquales. In priore 8, in posteriore 12.

A X I O M A VII.

§. 15. **T**otum est majus qualibet sua parte; æquale autem partibus suis simul sumptis.

Sic

Sic numerus ternarius major est qualibet sua unitate; æqualis vero partibus suis simul sumtis.

DEFINITIO IV.

§. 16. **P**ars *aliquota* est, quæ aliquoties sumta numerum totum perfecte metitur, v. g. tria quater repetita metiuntur perfecte numerum duodenarium. *Aliquanta* vero pars est, quæ numerum non metitur perfecte v. g. 5. respectu 12; non enim unquam poterit numerus duodenarius in æquales partes dividi, quarum una efficiat 5.

AXIOMA VIII.

§. 17. **S**I duorum totorum dimidium, vel quæcunque aliquota pars fuerit æqualis, etiam tota erunt æqualia, & vicissim.

Sicut enim se habent tota ad invicem, ita & eorundem partes: duo calices, quorum uterque 12 libras ponderet, habebunt media, quæ 6 libras; & quadrantes, quæ 3 libras ponderent.

COROLLARIUM II.

§. 18. **P**orro cum necessarium sit Arithmeticæ operam datururo, partes aliquotas præcipuorum numerorum nosse; juvat memoriæ adjuvandæ causa, *Abacum Pythagoricum* subjicere, qui partes aliquotas primorum decem numerorum exhibeat usque ad centum.

Usus hujus tabulæ talis est: velis scire, quantum efficiat septies 8, perge a numero 7 recta linea deorsum, quoadusque ad transversalem lineam 8 pervenias; & reperies 56.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

COROLLARIUM III.

§. 19. **Q**ui numerorum inventores fuerunt, numeros non plures quam decem posuerunt, quibus absolutis initium numerandi repetitur; occasio hujus fuisse videtur, quod in digitis primum supputare consueverent; potuissent autem utique, si lubitum fuisset, simplices numeros amplius extendere.

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

Algebraici characterum, seu numerorum loco literis utuntur ad quantitates determinandas, nempe A, B, C, D, E, F, X, Y, Z. hoc cum discrimine, quod priores literæ A, B, C, D. &c. communi quadam inter eos conventionem ad *cognitas*, seu *datas* quantitates exprimendas adhibeantur; postremæ vero veluti X, Y, Z. ad *incognitas* & *quasitas*; memoriæ tamen adjuvandæ causa tam *cognitas*, quam *incognitas* quantitates mos est passim indicare per primam illius rei literam, quam significant: veluti *motum* per m, *tempus* per t, *velocitatem* per v, *radius* per r, *sinum* per s, *tangentem* per t. &c.

Differunt itaque Arithmeticorum, & Algebraicorum characteres in hoc, quod Arithmeticorum characteres, seu numeri ad certam aliquam determinatamque quantitatem significandam sint destinati, quamvis materia, quæ illo numero con-

continetur; indeterminata sit, maximeque variabilis; veluti tres civitates minorem semper numerum referunt, quam quatuor, utut una civitas plures cives contineat: Algebraicorum vero characteres, id est literæ, nequidem determinatæ quantitati sint adstricti. Nunquid clarum cuivis est, lineam aliquam, cujuscunque sit demum extensionis, majorem futuram, postquam alteri cuidam lineæ, cujuscunque itidem extensionis, fuerit copulata? aut omnino minorem, cum in duas fuerit discreta partes? Quoniam autem indeterminatæ duæ quantitates haud secus, ac numeri ipsi definiti, calculo censerì possunt, hinc *Algebra* duxit originem, quæ est *scientia docens calculum quantitatum indeterminatarum.*

CAPUT II.

De Numeratione.

DEFINITIO.

§. 20. **N**umeratio est plurium quantorum disgregatorum apta representationis, & pronuntiatio.

HYPOTHESIS.

Characteres simplices, seorsim positi, significant unitates v. g. 1, 2, 3 &c. Characteres vero duplicati significant décadas v. g. 10, 20, 35, 46 &c. Triplicati characteres notant centurias: quadruplices notant millenarios; v. g. 1000. quintuplices characteres notant decem millenarios, ut 10000. Sextuplices notant centum millenarios, ut 200. 000. septuplices significant millionem v. g. 1000. 000. 2000. 000. Quæ omnia sequenti Schemate exprimuntur.

| | |
|---------|--------------------|
| 2 | unitates. |
| 20 | decades. |
| 200 | centuriæ. |
| 2000 | millenarii. |
| 20000 | decades millenar. |
| 200000 | centuria millenar. |
| 2000000 | Milliones &c. |

Nul-

Nullitas, seu cyphra 0, vel etiam plures, si ante numerum ponatur, nihil significat v. g. 002. significat tantum 2; secus vero si numeris postponatur.

§. 21. **I**n occurrente majore numero v. g. 1752. unitates sunt a dextris; & inde, a dextris sinistram versus procedendo, in secundo caractere recurrunt decades, in tertio centenarii &c. quod argumento est: notas numerorum ab Orientalibus populis fuisse originem, qui scripturas suas præposito ordine, a dextra incipiendo, sinistram versus prosequuntur, ut Arabes, Chaldæi, Hebræi &c. Europæi vero, cum scripta sua a sinistra dextram versus exarent, in sola numerorum scriptione Orientalium consuetudinem receperunt; nostro enim scribendi more inverso, oporteret primo unitates, tum decades, inde centurias &c. exprimere.

§. 22. **M**agna numeranti facilitas accedit, si post ternos quosque characteres *punctulum* apponat, idque incipiendo a dextra sinistram versus; ita ut post primum punctum sequantur *millenarii*, post secundum *milliones*; & notetur superna virgula. *Billiones*, quorum unus millies mille milliones comprehendit, sequuntur post quartum punctum, & notantur duplici virgula. Post sextum punctum sequuntur *Trilliones*, quorum unus millies mille *Billiones* continet, notanturque triplici virgula, & sic porro: v. g.

''' '' '

3. 720. 346. 120. 989. 372. 406.

hi characteres sic rite numerando exprimuntur: 3. *trilliones*, septies centeni viginti mille, trecenti, *quadragesima sex billiones*, centies viginti mille nongenti octoginta novem *milliones*, trecenta septuaginta duo *millia*, *quadragesima, & sex*.

P R O P O S I T I O.

§. 23. **H**unc numerum militum : *Ducenties mille, septingenti viginti quatuor* rite adscribere.

Primo loco a sinistris ponantur *millenarii*, tum dextram versus continentur *centuria*, tandem *decades* (§. 21).

200, 724.

(Nota) cum numeri distantur v. g. *viginti duo millia, octingenta, viginti quinque*, non debet scribens illico auditis *viginti duobus millibus* adscribere 22000, sed tantum 22.; nescit enim; quotnam *centuria*, & *decades* porro subsequantur; tum auditis *centuriis octingentis*, adjunctoque caractere 8. tandem ad *decades* 25. procedat, habiturus numerum 22. 825.

Nisi quis mallet separatim *millenarios, centenarios* &c. adscribere, ac tandem summam omnium per *additionem* colligere.

v. g. 22000

800

25

22825

Quod tamen prorsus inutile foret.

Nunc præcipuas quatuor *Arithmetica* species : *additionem, subtractionem, multiplicationem, & divisionem* ordine persequamur.

N O T Æ A L G E B R A I C Æ.

Cum legitima quidem Numerorum collocatio tanti momenti sit apud *Arithmeticos*, ut ex duobus, aut pluribus numeris præpostere collocatis diversissima computatio oriatur; (§. 20.) apud *Algebraicos* tamen nulla neglectæ hujus collocatio- nis est efficacia, tantumdemque valent *polynomia* $B + A$, quam $A + B$. Sunt autem *polynomia* quantitates compositæ ex pluribus terminis, per signa + *plus*, aut - *minus* copulatis v. g. $A + B$, vel $A B - B B$. Item $A C + M - R$. Partes vero harum *polynomiarum* sunt hic : A & B , item $A B$, & $B B$, Item $A C$, M , R , dicunturque termini comple-
D
xæ

xæ quantitatis algebraicæ. *Monomia* sunt quantitates algebraicæ, quæ unum duntaxat terminum complectuntur v. g. A B. A B C &c. Interea tamen, ut calculus in majori claritate decurrat, confuevimus ordinem alphabeti retinere.

C A P U T III.

De Additione simplici.

§. 24. *ADditio est duorum, vel plurium Numerorum in unum collectio.*
Indicatur per signum + adjectum, id est: plus

Cum numeri in simul addendi adscribuntur, ita disponuntur, ut ultimi characteres a dextris subtus se invicem accurate adscribantur: *Unitates* sub *unitatibus*: *decades* sub *decadibus* &c. v. g.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 302 \\ 12 \\ 1070 \\ \hline 4 \end{array}$$

Incipit vero additio ab infimo characterè, dextrorsum collocato, qui additur cum aliis characteribus in linea recta ascendentibus. Additis omnibus illis numeris primis, *unitates*, quæ

ultra rotundum *decadum* Numerum excurrunt, ponuntur infra hunc primum ordinem characterum; *decades* vero relictæ referuntur ad secundum ordinem; & quod supra *decades* reperitur, infra adscribitur sub secundo ordine; *decades* vero pro tertio ordine asservantur. Et sic porro.

PROPOSITIO.

§. 25. *N*umerum præsentem in simul addere.

Dicatur: $4 + 2 + 2 + 7$ sunt 15. ponatur itaque 5 infra hunc primum ordinem; *decadem* vero 1. reserva pro ordine secundo, ac dic. $1 + 7. + 1 + 6$ sunt 15. 5 rursus ponatur sub secundo

$$\begin{array}{r} 67 \\ 302 \\ 12 \\ 1070 \\ \hline 4 \\ 1455 \end{array}$$

or-

ordine, *decas* vero pro tertio ordine reservetur. Tum ad tertium ordinem procedendo, dicatur: $1 + 3$ sunt 4. hunc characterem 4 adscrito sub tertio ordine, & quoniam nulla *decas* remansit, accede ad quartum ordinem, inibique cum nihil nisi 1 deprehendas, adscribe solam hanc unitatem sub quarto ordine, prodibitque numerus 1455. exprimens omnes minores additos.

Nam hic Numerus collectus 1455 continet omnes *unitates, decadas, centurias, & millenarios* numerorum minorum, nihilque superfluit. Igitur æqualis est omnibus simul sumptis (§. 15.)

§. 26. **P**ROBA *additionis* hoc modo fit: ex addendarum quantitatum, seu characterum numero una omittitur, cæteræ coadduntur; summa tandem proveniens subtrahitur a summa facti prioris exempli, & remanebit numerus omiffus. v. g. velis hujus facti exempli probam adjicere: subduc primam positionem nempe 24, cæteros duos numeros 36 & 60 adde, prodibunt 96, hæc 96 subtrahe a summa exempli 120, remanebitque numerus omiffus 24.

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 36 \\
 60 \\
 \hline
 120
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 24 \\
 \hline
 36 \\
 60 \\
 \hline
 96
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 120 \\
 96 \\
 \hline
 24
 \end{array}$$

Alio modo proba perficitur, si tam a numeris *addendorum*, quam a numero ex *additione* proveniente 9 abjeceris; & si idem numerus remanserit, bene fuit factum exemplum, veluti in mox allata propositione: si ex characteribus addendorum bis 9 abjeceris, remanebunt 3; factum quoque ipsum 3 exhibet.

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

QUONIAM Additionis signum est + (§ 24) solent Algebraici B ipsi A sic addere: $A + B$. Item $A + B + C + D$. Si itaque $A = 3$, $B = 6$, $C = 4$, $D = 9$, $= 22$. Quod si

D 2

si

si vero addendæ quantitates sint similes, scribantur similes cum suis signis infra similes quantitates, reducanturque ad terminos similes; v. g. addere velis $2 AB + 3 BC + 4 CD$ cum $3 AB + 2 BC - 5 CD$.

$$\begin{array}{r} \text{Scribatur } 2 AB + 3 BC + 4 CD \\ \quad 3 AB + 2 BC - 5 CD \end{array} = 5 AB + 5 BC - CD.$$

Quia nempe $2 AB + 3 AB = 5 AB$; $3 BC + 2 BC = 5 BC$; & $4 CD - 5 CD = -1 CD$, seu simpliciter $- CD$.

$$\begin{array}{r} \text{Item } 3 A - 3 B \\ \quad + 2 A - 4 B \end{array} = 5 A - 7 B.$$

Illæ itaque quantitates, quibus signum $+$ præmittitur, vocantur *positivæ*; nam addunt aliquid positivum habenti. Illæ quoque quantitates, quibus nullum signum algebraicum præcedit, pro positivis habentur, veluti: $P - M$ idem est, ac $+ P - M$.

Denique numeri, qui algebraicas quantitates, seu terminos præcedunt, dicuntur *coefficientes* v. g. in hac positione $3 BC$ numerus 3 est *coefficientis* producti BC , ostenditque quantitatem BC esse ternam; Et $3 A = A + A + A$, sique A ponatur $= 4$, erit $3 A = 4 + 4 + 4 = 12$. Item in hoc termino $4 D$ *coefficientis* est 4 . &c.

Dum autem quantitati Algebraicæ nullus numerus *coefficientis* præmittitur, semper supponitur esse *coefficientis* 1 , veluti $AB = 1 AB$. Omittiturque duntaxat numerus, ut calculus simplicior reddatur.

C A P U T IV.

De Subtractione simplici.

§. 27. *Subtractio est numeri minoris a numero majori separatio; indicaturque per signum $-$, id est: minus. Ope subtractionis*

Sionis innotescit differentia duorum numerorum; quanto nempe major numerus minorem excedat, apparebuntque dati numeri inæquales (§. 12.)

§. 28. **I**N Subtractione minor numerus infra majorem ponitur hac ratione, ut numeri finales dextimi apte infra se scribantur, neque alter alterum excedat ordine, quamvis numeri initiales sinistimi non se adæquarent. Tum inferiorem a superiori *subtrahere*, tam per *unitates*, quam per *decades*, *centurias* &c. incipiendo ab ultima unitate a dextris posita. Quod si inferior numerus alicubi major sit, quam superior; punctulum pone ad præcedentem numerum, quod punctulum in ulteriori subtractione *unitatem* valebit.

PROPOSITIO I.

§. 29. **J**uxta peritos Astronomos, distantia maxima planetæ *Saturni* a terra est semidiametrorum telluris 244000: *Solis* vero semidiametrorum 22374. Quæritur: quot semidiametris *Saturni* distantia a terra *solem* superet?

Primo majorem numerum, nempe semidiametros distantie *Saturni* a terra adnota: infra hunc scribe minorem distantiam *Solis*, ac ducatur linea; tum, quia 4 a nullitate subtrahi nequit, ideo 4 subtrahenda sunt a 10, & punctulum vicino characteri 7 apponendum: subtractis itaque 4 a 10 remanent 6; hæc directe infra characterem 4 collocentur. Tum perge dicendo: 8 (7 enim cum punctulo valet 8) a secunda nullitate superiori deminequit: igitur, apposito punctulo ad sequentem characterem 3., 8 subtrahantur a 10; quod remanet, nempe 2, ponatur infra characterem 7. &c. atque ubi hac ratione continuo perrexeris, prodibit *differentia* minoris numeri a majore nempe: 221626 semidiametrorum, quibus *Saturnus Sole* a Tellure est remotior.

$$244000$$

$$\underline{22374}$$

$$221626 \text{ differentia.}$$

hi nequit, ideo 4 subtrahenda sunt a 10, & punctulum vicino characteri 7 apponendum: subtractis itaque 4 a 10 remanent 6; hæc directe

§. 30. **P**roba bonæ operationis factæ in *Subtrahendo* exhibetur, dum numerus subtractione inventus, nempe: 221626 cum minori numero subtracto 22374 simul additur (§. 24.) & rursus ille magnus numerus 244000, a quo minor subtractus est, provenit. Dic itaque 6 + 4 sunt 10, nullitatem pone infra 6, unitatem reserva 244000 pro sequenti ordine &c. peracta operatione habebis priorem Numerum 244000; adeoque, *differentia*, & *subtractus numerus* est æqualis illi, a quo *substractio* facta est. (§. 15.) Quod rite factam fuisse *subtractionem* probat.

$$\begin{array}{r} 244000 \\ - 22374 \text{ Subtr.} \\ \hline 221626 \text{ Add.} \\ \hline 244000 \text{ Proba.} \end{array}$$

PROPOSITIO II.

§. 31. **D**ata distantia *Solis* a terra nempe 22374 semidiametris terrestribus, & data distantia *Luna* maxima 61 semidiametrorum, invenire *differentiam distantiae* utriusque a terra.

22374 — 61 valet 22313. Est igitur *differentia distantiae Solis, & Luna a Terra* 22313 semidiametris terrest. *Terræ autem semidiametrus ex Cosmographorum calculo extenditur ad 900 circiter miliaria Germanica.*

$$\begin{array}{r} 22374 \\ - 61 \\ \hline 22313 \text{ differ.} \\ \hline 22374 \text{ Proba.} \end{array}$$

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

Algebraici, quibus signum — est subtractionis, sic subtrahunt quantitatem + B ab A: A — B. ut vero — B subtrahatur ab A, commutetur signum — in +, & scribatur: A + B, quia nempe quantitas A. hac subtractione augetur. Item subtractio 3 AB — 2 BC + 2 CD a 5 AB — 3 BC + 2 CD sic peragitur

$$\begin{array}{r} 5 AB - 3 BC + 2 CD \\ - 3 AB - 2 BC + 2 CD \\ \hline 2 AB - BC. \end{array}$$

Tol-

Tollendo quippe — *minus*, ponitur + *plus*; haud fecus ac debitor 6 florenorum, qui possideat 50 florenos, non censetur habere 50, sed $50 - 6 = 44$; tollatur eidem debitum, augebitur illius possessio per 6, & tum habebit 50 florenos. Porro ille, qui pecuniam quidem possideat, eam autem alteri teneatur, nihil habet: qui autem nihil pecuniæ habet, & florenum unum alteri teneatur, minus habet quam nihil. Igitur quantitates *negativæ*, quibus nempe signum — præmittitur, sunt minus, quam nihil; & 0 *nihil* tenet medium inter quantitates *positivas*, & *negativas*.

Quoniam autem nulla quantitas ab altera potest subtrahi, nisi in eadem contineatur; qui voluerit B ab A subtrahere, necessario supponere debet, B in A contineri, ita ut quantitate una ab altera sublata remaneat utriusque differentia; sicut enim 2 est differentia inter 5 & 3, & $5 - 3 = 2$; seu differentia inter 5 & 3 est $5 - 3$; ita quoque A — B differentia est utriusque, alterius per +, alterius per —.

C A P U T V.

De Multiplicatione simplici.

§. 32. *M*ultiplicatio est toties repetita alicujus numeri assumptio, quoties *multiplicans* unitatem in se completitur. Multiplicationis signum est X.

Major numerus, qui superiori ordine adscribitur, dicitur *multiplicandus*; minor vero numerus, qui infra ponitur, dicitur *multiplicans*. Collocatio characterum est talis: ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant, ut dictum est (§. 24.) Tum ultimus character *multiplicantis* a dextris positus, ducitur singillatim in omnes numeros *multiplicandi*; ita tamen, ut unitates decadem excedentes sub numero *multiplicato* ponantur; numerus vero decadam pro multiplicatione sequentis numeri fervetur, veluti §. 24. quo in negotio plurimum juvat tabulam *Pythagoricam* nosse (§. 18). PRO-

PROPOSITIO I.

§. 33. **O**pe multiplicationis scire : quotnam horas septimana una contineat , si quilibet diēs in 24 horas ubique gentium est distributus ?

Numerus major nempe 24 adscribitur, infra hunc vero minor multiplicans 7. tum dic : *septies quatuor*, vel *quater septem* efficiunt 28 ; numerum unitatum 8 pone infra lineolam ; 2 autem, numerum nempe *decadum* reserva pro multiplicatione sequentis numeri, & dic : *septies duo*, vel *bis septem* sunt 14 ; additis 2, quæ ex decadibus mox remanserunt, fiunt 16 ; hæc itaque 16 colloca infra 2 primi ordinis, prodibitque numerus horarum unius septimanæ 168.

| | |
|-----|-----------------------|
| 24 | hora unius diei. |
| 7 | dies septimanae. |
| 168 | hora unius septimanae |

Etenim *numerus multiplicans* ducitur in unitates *numeri multiplicandi*, & reservatis pro secundo numero decadibus ducitur *multiplicans* quoque in decades *multiplicandi numeri* ; Ergo tota summa superioris *numeri multiplicandi* tot multiplicationes recipit, quot numerus inferior *multiplicans* habet unitates.

Proba, atque securitas de bona facta operatione in multiplicando habetur, cum *numerus multiplicans* assumitur pro *divisore*, qui totam summam hac ratione dividat, ut *quotus* idem sit cum numero priori *multiplicando*. Sed de *Divisione* mox infra.

SCHOLION I.

§. 34. **S**I plures *characteres multiplicantes* sint, tum primo *characterem dextimo multiplicante* in omnes superiores ducito (§. 32.) fit transitus ad secundum *characterem multiplicantem*, qui in loco *decadum* est notatus ; procediturque eodem modo, quo prius, nisi quod prima *multiplicati numeri* nota, non jam in loco *unitatum*, sed in loco *decadum* inferiori ordine ponatur. Idem faciendum, si tertius aliquis sit *character multiplicans*, qui in loco *centuriarum* ponitur &c. quod sequens *Propositio* declarat.

PRO-

PROPOSITIO II.

§. 35. **C**um globus telluris in 360 gradus divisus sit, quilibet autem gradus in maximo circulo ad 15 miliaria germanica extendatur; beneficio *multiplicationis* reperire; quotnam miliaria telluris peripheria maxima complectatur?

Primo ordine ponitur major *numerus multiplicandus* 360. infra hunc ponitur *numerus multiplicans* 15; facta deinde *lineola* dicatur: *quinquies nullitas* est denique nullitas, hanc *nullitatem* seu *cyphram* pone sub *charactere* 5. tum dicatur: *quinquies* 6 sunt 30; rursus *cyphram* sub *charactere* 6 in loco *decadum* pone; numerum vero *decadum* 3, qui remansit, pro *multiplicatione* sequentis numeri *reserva*, dicendo: *ter* 5 sunt 15, additisque illis 3, *prodeunt* 18. quæ loco ultimo *adscribes*.

$$\begin{array}{r}
 360 \text{ Gradus.} \\
 15 \text{ Milliaris unius Gradus.} \\
 \hline
 1800 \\
 360 \\
 \hline
 5400 \text{ Summa Milliarium.}
 \end{array}$$

Tum *transi* ad *secundum numerum multiplicantem*; dicendo: *semel* 0 est item 0; hanc *nullitatem* infra in loco *secundo* nempe *decadum* *adscribe*. *Perge* ad *sequentem*, & dic: *semel* 6 sunt 6, hunc *characterem* infra 8 in loco *tertio* nempe *centuriarum* *adscribe*; tandem *progredere* dicendo: *semel* 3 sunt 3. *deponeque* *characterem* hunc 3 in loco *quarto* nempe *millenariorum*. Quod si hos duos numeros apte collocatos 1800, & 360 addideris (§. 24) *habebitur numerus miliarium Peripheria maxima Telluris* 5400.

Nam *numerus superior multiplicatus* est per 5 *unitates*; tum etiam *multiplicatus* est per unam *decadem*: ergo *toties multiplicatus* est, quot *numerus inferior multiplicans* *continet unitates*.

SCHOLION II.

§. 36. **S**I numerum aliquem v. g. 35 per 10 multiplicare oporteat, nihil necessum est, nisi numero *multiplican-*

cando cyphram adjicere, ut fiat 350. Si idem numerus per 100 multiplicari debeat, adjiciantur duæ cyphræ 3500. si per 1000, adjiciantur eidem tres cyphræ 35000 &c.

SCHOLIION III.

§. 37. **S**I *multiplicans numerus* cyphras annexas habeat, eæ cyphræ dextrorsum numero invento, seu producto præmittantur; *multiplicatio* autem incipiat a *numero multiplicante* v. g.

| | | |
|--------|------|--------|
| 345 | Item | 2630 |
| 300 | | 200 |
| 103500 | | 526000 |

§. 38. **A**lia præterea adhucdum superest *multiplicandi ratio* etiam in majoribus numeris tractandis facilis, & expedita, per *Tabulas* nempe *Neperianas*, sic dictas ab Auctore suo *Joanne Nepero* (*Num. XIII. Proleg.*)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 2 | 5 | 8 | 1 | 4 | 7 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 2 | 6 | 0 | 4 | 8 | 2 | 6 |
| 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| 6 | 0 | 6 | 2 | 8 | 4 | 0 | 6 | 2 | 8 | 4 |
| 7 | 0 | 7 | 4 | 1 | 8 | 5 | 2 | 9 | 6 | 3 |
| 8 | 0 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 9 | 0 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Paran-

Parantur autem *Tabula Neperiana* sic: e crassiori conglutinata *Charta*, aut *ligno*, aut *osse*, aut etiam *metallico* disponantur *oblonga lamella* ita, ut in novem quadrata spatia commodo valeant ordine dispesci; singula quadrata per diagonalem redigantur in duo triangula, atque inscribantur quadratis illis characteres *Tabula Pythagorica*, (§. 18.) hac cum cautela, ut, dum unus tantummodo character aream in *Tabula Pythagorica* obtinet, ille ad dextram collocetur; ubi vero duo characteres aream in *Pythagorica Tabula* occupant, tum dexter character ad dextrum, sinister ad sinistrum triangulum *Tabula Neperiana* rejiciatur. Præter has *Tabellas*, superne novem primis characteribus distinctas, & meris triangulis consignatas, fiat alia lamella, quæ novem primos characteres in quadratis spatiis continuo descensu exhibeat sine triangulis, & quæ veluti *index* cæteris *Tabellis* deserviat, uti in *Schematismo* exhibetur. Jam sit.

PROPOSITIO III.

§. 39. **N**umerum anni labentis 1752 per alium numerum datum v. g. per 348. multiplicare beneficio harum *Tabularum Neperianarum*.

Primum *Tabellas* eas sic dispone suo ordine, ut *numeros multiplicandum* 1752 supernis characteribus exhibeant. His a sinistris alteram *Tabulam indicis* in quadrata digestam apone; in hac tabula indice quære ultimum *multiplicatoris* 348 characterem dextimum nempe 8. & procedendo ad ultimam *Tabellam* dextimam, superne 2 referentem, deprehendes in octavo ordine primum dextimum triangulum cum characterem 6, itaque 6 scribe infra lineam primo loco dextimo; post triangulum 6, occurrent in duobus proximis triangulis sinistram versus, *rhombum* componentibus, alii duo characteres nempe 1 & 0; hæc adde invicem, & 1 adscribe se-

cundo loco infra lineam. In proximo *rbombo* sinistram versus occurrent duo characteres nempe 4 & 6. hæc adde, fiet 10; cyphram itaque tertio loco infra lineam depone, unitatem vero decadis pro sequenti *rbombo* asserva. Porro sequens *rhombus* refert duos characteres 5 & 8, hi simul additi, adjecta priori, quæ remansit, unitate, efficiunt 14. Hæc itaque 14 infra lineam quarto loco adscribe, habebisque primi ordinis numerum 14016, qui æquivaleret 1752×8 ut examinanti patet.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 1 | 1 | 7 | 5 | 2 | |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 4 | |
| 3 | 3 | 1 | 5 | 6 | |
| 4 | 4 | 8 | 0 | 8 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | |
| 6 | 6 | 2 | 0 | 2 | |
| 7 | 7 | 9 | 5 | 4 | |
| 8 | 8 | 6 | 0 | 6 | |
| 9 | 9 | 3 | 5 | 8 | |

Transi ad secundum characterem *multiplicatoris* nempe ad 4. ab hoc in *Tabula indicis* reperito, procede quarto ordine ad ultimam dextimam *Tabulam*, reperiesque in ultimo dextimo triangulo characterem 8, hunc secundo infra lineam ordine adscribe, & quidem in loco *decadum*, quemadmodum dictum est (§. 34.) in proximo *rbombo* sinistram versus sequitur unica

cyphra, hanc 0 pone secundo loco; rursus in sequente *rbombo* sequuntur duo characteres 2 & 8, hi additi efficiunt 10, cyphram igitur tertio loco adscribe, & unitatem decadis reserva proximo *rbombo*, in quo duo characteres positi sunt 2 & 4, hi rursus cum priori unitate simul additi efficiunt 7. Igi-

tur

$$\begin{array}{r}
 1752 \\
 \underline{348} \\
 14016 \\
 7008 \\
 \underline{5256} \\
 609696 \quad \text{Summa.}
 \end{array}$$

tur 7 quarto loco adscribe, & habebitur numerus 7008, qui æquivalet 1752×4 .

Procedatur ad tertium *multiplicatoris* characterem, nempe ad 3, & instituta consimili operatione prodibit ex triangulis, & rhombis *tabularium* hicce numerus 5256, cujus initium dextrimum infra lineam fiat in loco centuriarum, eritque numerus $5256 = 1752 \times 3$. Itaque numeri $14016 + 7008. + 5256..$ expriment summam numeri 1752×348 nempe 609696. *Quod erat faciendum.*

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

IN *Algebra* fit multiplicatio per simplicem literarum conjunctionem, nullo signo interposito, neque habetur ratio ordinis literarum; vel etiam per interpositum signum \times ; sic AB vel BA aut $A \times B$ significat productum ex A in B, vel B in A; ita ut si $A = 3, B = 4; A \times B = 3 \times 4 = 12$. sic BCD indicat tres quantitates B, C, D esse invicem multiplicatas, quemadmodum & AA indicat quantitem A esse multiplicatam per A, debetque toties adscribi quantitas multiplicanda, quoties per semetipsam multiplicatur. v.g. $A \times A \times A = AAA$; ut tamen compendium operationi accedat, quantitas adscribitur tantum semel, & supra eam a dextris collocatur numerus, qui significet, quotnam vicibus multiplicatam illam quantitatem adscriptam esse oporteret. Sic

loco $A \times A \times A$ scribitur A^3 , & numerus 3 dicitur *exponens* quantitatis A (§. 99.) ita porro in aliis v.g. AA BB scribuntur $A^2 B^2$

Neque vero *exponentes cum coefficientibus* (de quibus tertio capite adnotatum est) confundi debent; magna enim est distinctio inter $3 A$, & A^3 ; Etenim fit $A = 4$, erit $3 A = 12$; & $A^3 = A \times A \times A = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Coefficientes quippe notant, quoties eadem magnitudo sibi adjuncta sit; *exponentes* vero indicant, quoties quantitas aliqua per seipsam sit multiplicata.

Productum quantitatis multiplicatæ per seipsam vocatur *potentia secunda*; sic AA , vel A^2 est *secunda potentia* quantitatis A , aut *quadratum* quantitatis A (§. 102.) Quodsi quantitas multiplicetur per suam secundam *potentiam*, provehetur ad suam tertiam *potentiam* v. g. $A \times A^2 = A^3$, quæ est *tertia potentia* quantitatis A seu *cubus*.

Tribus autem modis fit multiplicatio. Primo *cum terminis positivi per positivos multiplicantur*, aut $+$ per $+$, & tum productum semper est $+$. Unde prima *regula*: plus per plus dat plus; v. g. multiplicatio AB per CD sic scribitur: $AB \times CD$; aut $ABCD$. Item $+2 AB \times 3 CD = 6 ABCD$.

Secundo, Cum terminus *positivus per negativum*, aut *negativus per positivum* multiplicatur, productum est affectum signo $-$ minus. Hinc enata est altera Algebraicæ multiplicationis *regula*: plus per minus, aut minus per plus dat minus. v. g. Multiplicetur $-A$ per $+B$, productum erit $-AB$. Item $+3A \times -4B = -12AB$. aut $-3A \times +4B = -12AB$; nam primus multiplicator *negativus* -4 toties negat, seu tollit multiplicandum; & iterum multiplicator *positivus* $+4$ significat, quod -3 quatuor vicibus repetere oporteat, ideoque productum erit $-$ minus.

Tertio, Cum terminus *negativus per alterum negativum* multipli-

tiplicatur, erit productum affectum signo +. Atque inde orta est *tertia regula*: minus per minus dat plus. v. g. Multiplicando $-A$ per $-B$, habetur productum $+AB$. Item $-3A \times -4A = +12A$; Cum enim multiplicator $-4A$ sit terminus *negativus*, petit terminum multiplicandum $-3A$ pariter negativum quater tolli; tollendo autem $-$, restituitur $+$: Igitur tollendo quater $-3A$ scribetur $+3A + 3A + 3A + 3A = +12A$. Ideoque $- \times - = +$.

CAPUT VI.

De Divisione simplici.

§. 40. *D*iviso est separatio unius numeri, nempe minoris a majori, toties repetita, quoties in majori minor continetur.

§. 41. *N*umerus novus, qui ope *Divisionis* invenitur, dicitur *Quotus*, in quo toties unitas continetur, quoties numerus minor continetur in majori, qui *Divisus est*.

§. 42. *D*iviso sic peragitur: Numerus *dividendus* adscribitur, infra hunc recto ordine a sinistris ille, per quem fit *Divisio* seu *Divisor* adnotatur; tum inquiritur beneficio *Abaci Pythagorici*: quoties *Divisor* unius, vel plurium characterum in uno, vel pluribus characteribus *dividende summe* contineatur. Hoc reperto, notetur *quotus* a dextris, & per *quotum Divisor* multiplicetur; summa ex multiplicatione proveniens, a *dividende summe* primis characteribus, ad sinistram collocatis, subtrahatur. Quod remanet, supra *dividendum* adscribitur; *Divisor* vero infra *dividendum* denuo, & quidem uno loco ad dextram vicinior adscribatur. Iterum videatur: quoties *Divisor* in superiori *dividendo*, una cum illis numeris, qui ex subtractione priori remanserunt, contineatur? *Quotum* denuo priori ad dextram posito, adijunge; tum hunc *Divisorem* multiplica, multiplicatum a superiori subtrahe, & sic ulterius. Ubi bene advertendum est: *quotum* nunquam esse posse numero 9 majorem.

§. 43. **Q**Uoniam vero *proba* prioris speciei nempe *multiplicationis* est *Divisio*; juvat hic priora *multiplicationis* Problemata inverſo ordine producere, ut non tantum *Divisionis* exempla afferantur in medium; ſed etiam *probatio* rite factæ *multiplicationis* exhibeatur.

PROPOSITIO I.

§. 44. **C**UM *ſeptimana* communi gentium conſenſione 168 horas contineat, reſcire ope *divisionis*: quotnam horarum una ſit dies?

Numerus major *dividendus* 168 adſcribatur; infra hunc a ſiniſtris adſcribatur *Diviſor* 7; dicaturque 7 $\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 168 & 24 \\ 77 & \end{array}$ intra 16 continetur bis, hanc *dualitatem* adſcribe poſt lineolam factam a dextris. Tum dic: bis 7 ſunt 14, ſubtractis 14 a 16 (§. 27.) remanent 2. hæc 2 notentur ſupra 6. Deleantur 16 & 7 per virgulas inflictas. Porro *Diviſorem* 7 transfer una ſtatione magis ad dextram, ut ſtet ſub caractere 8, & dic: 7 in 28 continentur quater; hunc numerum 4 ſcribe ad quotum priorem a dextris, & dic: quater 7 ſunt 28. 28 a 28 dum ſubtrahis, nihil remanet; Igitur ſunt 24 horæ unius diei.

Quoniam itaque tam *unitates*, quam *decades*, & *centuria* &c. numeri *dividendi* per *Diviſorem* ſeparantur; ergo toties *Diviſor* in *dividendo* continetur, quoties *quotus* unitatem exprimit; ſicque operationis habetur *demonſtratio*. *Proba* autem *divisionis* bene peractæ, eſt *multiplicatio*, de qua Capite mox ſuperiori.

SCHOLION I.

§. 45. **A**ccurate explorari debet, quoties *Diviſor* in proportionis numeris *ſumma dividende* contineatur; non enim debet aut parcius, aut ſæpius *Diviſor* in *dividendum* aſſumi, quam *conditio dividendi* numeri ferat.

PRO-

PROPOSITIO II.

§. 46. **C**Um 360 gradus, circa tellurem æqualiter dispositi, 5400 milliaria germanica contineant; quæritur: quotnam unus gradus milliaria complectatur?

Primo numerum milliarium 5400, qui per 360 gradus dividendus est; adscribatur; infra hunc scribatur *divisor* nempe 360 gradus. Tum dicatur:
$$\begin{array}{r|l} 180 & \\ 360 \text{ in } 540, \text{ seu potius } 3 \text{ in } 5 & 5400 \\ \text{tantum semel continentur; igitur} & 360 \\ \text{unitas ad dextram extra lineolam} & 360 \\ \text{pro quoto adscribatur,} & \\ \text{dicaturque; semel } 0 \text{ est } 0, \text{ semel } 6 \text{ sunt } 6, \text{ semel } 3 \text{ sunt } 3. & \\ \text{itaque subtrahere } 360 \text{ a } 540 \text{ (§. 27.) \& remanebunt } 180. \text{ Iterum} & \\ \text{promove } \textit{Divisorem} \text{ } 360 \text{ una statione magis dextram versus,} & \\ \text{\& dic } 3 \text{ in } 18 \text{ hoc in casu continentur quinquies. Numerum} & \\ \text{hunc } 5 \text{ pone ad } \textit{quotum}, \text{ \& multiplicando } 360 \text{ cum } 5, & \\ \text{prodibit numerus } 1800; \text{ his igitur a superiori numero detra-} & \\ \text{ctis nihil remanet; adeoque sunt } 15 \text{ milliaria unius gradus.} & \\ \text{Demonstratio est pene eadem, quæ prior.} & \end{array}$$

SCHOLION II.

§. 47. **Q**uod si ex ultimo numero *dividendo* minor aliquis numerus remaneat, quam ut *Divisor* in eum duci possit, tunc occurrit *fractio*, quæ sic exprimitur, ut minori numero, qui *Numerator* dicitur, major numerus nempe *Divisor*, mediante lineola subjiciatur, qui numerus inferior dicitur *Denominator*.

PROPOSITIO III.

§. 48. **C**ampus quadrangularis æquilaterus habet perimetrum 896 pedum geometricorum; quæritur; quotnam pedes unum latus habere debeat?

Divisor 4 infra. Numerum *dividendum* 806 scriptus bis in eundem numerum *dividendum* ducatur. *Quotus* 2 a dextris collocetur. Promoveatur *Divisor* 4 una statione dextram versus, & dicatur : 4 in 0 duci nequit ; igitur nullitatem seu cyphram pro *quoto* adscribe. Promove rursus *divisorem* 4 infra 6, ac dic : 4 in 6 semel includuntur ; adscribe ad *quotos* unitatem, tum 4 a 6 subtrahe, & remanebunt 2. His mediante lineola subnecte *divisorem* 4, habebisque numerum pedum geomet. unius lateris

$$\begin{array}{r|l} 806 & 201 \\ \hline \cancel{444} & \\ 4 & \end{array}$$

$$201 \& \frac{2}{4} \text{ vel } \frac{1}{2}.$$

§. 49. **D**ivisio alio modo fit, & quidem maxime usitato, & expedito. Dum nempe *Divisor* extra lineam a sinistris ponitur, *quotus* vero a dextris. Post multiplicationes singulas, & subtractiones, quod remansit, infra *dividendum* ponitur, semperque unus character ex *dividendo* inferius dextram versus substituitur, ut rursus *Divisor* in eum duci possit v. g. 8066 essent per 4 *dividenda*, prodibit *quotus* 2016 $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & 8066 & 2016 \\ \hline & - 6 & \\ & 26 & \\ & - \frac{2}{4} & \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

§. 50. **N**umerum datum 609696 dividere per alium numerum datum, nempe per 1752, idque adhibitione *Tabularum Neperianarum*.

Primum eae *Tabella* e caeteris deligantur, quae, sibi conjunctae, expriment in supernis characteribus numerum *divisorem* 1752. His quatuor Tabellis *Tabulam* indicis (§. 38.) finitimam affige. Tum, considerando *Tabulas* juxta horizontalem

talem

talem ordinem, exploratur: quænam series *triangulorum*, & *rhomborum*, incipiendo a dextris versus sinistram, sit æqualis aut proxime minor primis characteribus *numeri dividendi* 6096 .., habita nempe ratione *divisoris* 1752, & deprehendetur in tertio ordine *Tabule indicis*, in ultimo quidem triangulo dextimo, primum character 6, in mox sequente *rhombo* character 5, in proximo rursus *rhombo* characteres 1 & 1, id est 2, ac tandem in ultimo *rhombo* characteres 2 & 3, id est 5; ita ut summa digesta hujus tertii ordinis sit 5256 proxime minor numero *dividendo* 6096, habito respectu ad *divisorem* 1752. Itaque numerus 3, *index* hujus ordinis ponetur pro primo *quoto* dextram versus; subtrahantur deinde 5256 a 6096 (§. 27.) & remanebunt 840. His adjugetur numeri superioris *dividendi* proximum characterem 9, ut sint 8409, & rursus in *Tabulis* inquiratur in numerum,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 5 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 5 | 6 |
| 4 | 4 | 8 | 0 | 8 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 6 | 6 | 2 | 0 | 2 |
| 7 | 7 | 9 | 5 | 4 |
| 8 | 8 | 6 | 0 | 6 |
| 9 | 9 | 3 | 5 | 8 |

$$\begin{array}{r|l}
 1752 & 609676 \\
 & 5256\cdot\cdot \\
 & -8409\cdot \\
 & 7008\cdot \\
 & 14016 \\
 & 14016 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 348$$

ex *triangulis*, & *rhombis* proveniente, proxime minorem numero hoc *dividendo*: deprehendeturque in quarto ordine, juxta mox insinuatam operationem, hicce numerus 7008; igitur numerum 4 *Tabula indicis* pro secundo *quoto* adscribe, hunc vero numerum 7008 a superiori 8409 subtrahere, & remanebunt 1401. Adjugetur huic residuo ultimum numeri *dividendi* characterem 6, ut sint 14016, & inquisitione facta de proxime minori aut æquali numero *Tabularum*, reperies in octavo ordine *Tabula indicis*, a dextris nempe sinistrorsum per

rhombos procedendo, summam 14016. Itaque adscribes numerum 8 pro tertio *quoto*, & subtracto 14016 a superiori 14016, nihil porro dividendum remanere deprehendes. Igitur Numerus *Divisor* 1752 in dividendum 609696 ductus *quotum* præbet 348, seu trecenties quadragies octies in eo continetur.

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

§. 51. **C**um *divisoris* beneficio id dissolvatur, quod per multiplicationem erat compositum, deleta *divisore* ex quantitate dividenda habebitur *quotus* v. g. sit dividendum AB per *divisorem* A: deleatur itaque hic divisor A, & habebitur quotus B; Quippe A & B sunt duo factores, qui totum AB constituunt; sublato itaque divisore A, remanebit *quotus* B, qui est alter duorum illorum factorum.

Signum *divisions*, est lineola ducta infra terminum *dividendum*, & supra *divisorem* in forma fractionum; velut $1\frac{1}{2} = 3$; Imo *divisio* $1\frac{1}{2}$ potest sumi pro *quoto* 3. Sic $\frac{a}{b}$ est divisio ipsius A per B. Itaque quemadmodum *divisor* duntaxat omittitur, cum *dividendo* eadem inesse literæ deprehenduntur, quas habet *divisor*: ita cum *dividendus* terminus nihil commune habet cum *divisore*, tunc divisio exprimitur: *dividendum* supra, *divisorem* vero infra lineolam ponendo.

Sicubi quantitates dividendæ sint, quibus adjuncti sint numeri *coefficientes*, illæ dividuntur, divisione communi arithmetica (42.) Veluti sit dividendus terminus 4 AB per 2 A; *quotus* ipsius numeri 4 est 2: ipsius vero AB est B; A enim est *divisor*: Igitur $\frac{4a}{2a} = 2B$; sicut $2B \times 2A = 4AB$. Per quod enim quantitas in *divisione* resolvitur, per hoc idem in *multiplicatione* restituitur.

Cæterum tres *regula* de signis + & - eundem locum in *divisione* Algebraica habent, quem dictæ sunt obtinere in *multiplicatione*.

multiplicatione capite precedenti. Sit igitur quantitas $+ 12 BCD$ dividenda per $+ 3D$, fiat hoc modo:

$$\frac{+ 12 \overset{1}{b} \overset{2}{c} \overset{3}{d}}{+ 3 \overset{3}{d}} = + 4 BC.$$

Plus quippe divisum per plus dat plus. Atque ut hujus veritatem advertas, multiplica quotum $4 BC$ per divisorem $+ 3D$; & habebis factum $+ 12 BCD$. Multiplicatio quippe est proba divisionis.

Iterum sit dividenda quantitas $+ 15 ACF$ per $- 5AF$, servetur secunda regula in multiplicatione tradita; erit enim quotus $- 3C$; etenim $\frac{+ 15 \overset{1}{a} \overset{2}{c} \overset{3}{f}}{- 5 \overset{2}{a} \overset{3}{f}} = - 3 C.$

Rurfus dividatur $- 24 AEF$ per divisorem $+ 3AEF$, erit divisor $- 8AE$. $\frac{- 24 \overset{1}{a} \overset{2}{e} \overset{3}{f}}{+ 3 \overset{2}{a} \overset{3}{e} \overset{3}{f}} = - 8 AE.$

Quia nempe $-$ divisum per $+$ $= -$; & 24 divisum per $3 = 8$; dividendo autem AEF , seu $AAEEEF$ per AEF , quia literæ AEF , quas divisor cum dividendo communes habet, deleri debent, restabit utique quotus AAE , seu AE^2 , aut conjunctim $- 8AE$. Proba hujus habetur, si per quotum $- 8AE$ Divisor $+ 3AEF$ multiplicetur; nam $+ 3AEF \times - 8AE = - 24AEF$.

Denique dividendo quantitatem affectam signo $-$, per divisorem itidem affectum signo $-$, prodibit factum, affectum signo $+$ juxta tertiam regulam in multiplicatione traditam: sic

$$\frac{- 12 \overset{3}{a} \overset{4}{b} \overset{4}{c}}{- 4 \overset{3}{a} \overset{3}{b} \overset{3}{c}} = + 3 AB.$$

Quod si numeri tantum, aut solæ literæ dividi possint, dividatur id, quod dividi exacte potest, reliqua per modum

fractionis scribantur (§. 65.) Sic in divisione $\frac{8ab}{4c}$ quotus erit $\frac{2ab}{c}$. Si vero neque numeri, neque literæ dividi adæquate possint, redigantur omnia in fractionem v. g. dividere oporteat 5 AB per 4 C scribatur $\frac{5ab}{4c}$

Literæ ejusdem quantitatis, variis exponentibus affectæ, dividuntur exponentium sublatione, contentarum in divisione v. g. $\frac{a^4}{a^2} = A^{4-2} = A^2$. $\frac{b^4c^3}{b^2c^2} = b^{4-2}c^{3-2} = b^2c$.

Ex quibus intelligitur, quod si quantitas per seipsam dividatur v. g. AB per AB, factum non sit o *nihil*, sed 1; supponitur quippe semper, quod ante omnes quantitates absoluta præcedat *coefficientis* 1, & disparentibus cunctis in divisione literis, remanere debeat numerus; ita ut $\frac{ab}{ab} = \frac{1 \times ab}{1 \times ab} = \frac{1}{1}$

CAPUT VII.

Resolvuntur quædam Problemata ope primarum quatuor simplicium specierum.

§. 52. Sunt & aliæ Propositiones, quæ per simplicem aliquam specierum fieri nequeant, sed in quibus duplicem diversam speciem adhibere est necessum. Sit

PROPOSITIO I.

§. 53. Sit parens 37 annorum, habeatque prolem 9 annorum; quæritur jam, quotnam annos proles hæc fu-

supervivere debeat, patre continuo vivente, ut medietatem paternæ ætatis attingat?

| | | |
|--------------------------------------|------|----|
| Primum itaque sinistrorsum | . 9 | 37 |
| ponantur anni hujus prolis 9, | . 2 | 18 |
| dextrorsum vero anni parentis | . 18 | 19 |
| 37. Duplicentur anni prolis, | . 19 | 19 |
| & fient 18. Hi 18 anni subdu- | 28 | 28 |
| cantur ab annis paternis 37, & | 28 | 56 |
| remanebunt 19. Itaque post | 28 | 56 |
| 19 annos vitæ, proles assequetur | 28 | 56 |
| dimidium ætatis paternæ ; | 28 | 56 |
| Etenim 9×19 efficiunt 28, & | 28 | 56 |
| 37×19 efficiunt 56 annos; | 28 | 56 |
| quorum medietas est 28. | 28 | 56 |

Nam subtractis duplicatis annis 9 nempe 18 a patris ætate 37, perspicuum est, hos annos paternos 37 dupliciter esse majores, quam sint anni prolis 9, & insuper remanere 19; itaque interea temporis, quo proles hos 19 annos absolvet, pater pariter alios 19 superaddit ætati suæ: atqui bis 19 anni paterni sunt rursus alterum tantum 19 annorum prolis, sicut antea: 18 anni fuerunt alterum tantum 9 annorum. Igitur his emensis pater habet ætatem altero tanto majorem: seu proles habebit medietatem ætatis paternæ. Nam $18 + 19 + 19$. seu $37 + 19$ constituunt 56 ex parte ætatis paternæ: & $9 + 19$ constituunt 28 ex parte prolis.

PROPOSITIO II.

§. 54. **V**iator quispiam cavillando petit ex Arithmetico scire: quotnam milliaria spatio unius septimanæ confecerit?

Arithmeticus igitur hujus ignarus jubeat viatorem, summam illam occultam milliariam, septimanæ spatio a se peractorum, clam per 9 multiplicare, & factum proveniens dividere per 3. Denique quotum hac divisione productum rursum

sum per 6 multiplicare. Hoc ultimum productum petat sibi Arithmeticus a viatore manifestari, illudque per 18 dividat, *quotus* dabit numerum milliarium a Viatore spatio unius septimanæ confectum. Sit v. g. occultus milliarium numerus

Nam $9 \times 6 = 54$. Et 54 per 3 dividendo habetur *quotus* 18; igitur per 18 summa tota dividi debet, ut occultus numerus 24 eliciatur.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 3 \overline{) 216} \quad | \quad 72 \\ \underline{-6} \quad \quad | \quad 6 \\ \hline 18 \quad | \quad 432 \quad | \quad 24 \text{ Millia.} \end{array}$$

§. 55. **H**Æc methodus ad alias res plurimas manifestandas adhiberi potest v. g. ad ætatem, ad nummos in clauso sacco contentos &c. v. g. haberet *Caius* 39 annos ætatis; jube eum itaque ignotos annos per 8 multiplicare, productum 312 per 4 dividere, & *quotum* 78 rursus cum arbitrario quodam numero v. g. 9 multiplicare, habebitur factum 702. Hoc factum pete tibi manifestari, ac divide illud per 18. *Quotus* 39 dabit annos quæsitos.

$$\begin{array}{r} 39 \\ 8 \\ \hline 4 \overline{) 312} \quad | \quad 78 \\ \hline 18 \overline{) 702} \quad | \quad 39 \text{ Anni.} \\ \underline{162} \end{array}$$

§. 56. **Q**uod si voluisses numerum 78 loco 9 per 12 multiplicari, deberes occultam *divisionem* assumere 24 loco 12; Nam sicut $9 \times 8 = 72$; 72 autem divisa per 4 = 18: ita $12 \times 8 = 96$, & 96 divisa per 4 = 24.

PROPOSITIO. III.

§. 57. **N**umerum magnum, etiam millenarios continentem, facili, & quidem sola mentali operatione multiplicare.

Sit numerus 4264 per 25 multiplicandus v. g. quantum con-

constent 4264 modii tritici, si singuli modii 25 grossis emuntur? Primum numerum multiplicandum 4264 mentaliter per 4 divide, habebis *quotum* 1066. Huic *quoto* adjice duas cyphras ut sint 106600, & habebis numerum grossorum, quo 4264 modii aestimantur; haud aliter, ac si numerum 4264 proluxa operatione.

$$\begin{array}{r|l}
 4 & 4264 \\
 & \underline{-26} \\
 & 24 \\
 & \underline{-24} \\
 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 10660 & 0 \\
 & \underline{-5330} \\
 & 5330 \\
 & \underline{-5330} \\
 & 0
 \end{array}$$

per 25 multiplicasses. Numerum grossorum 106600 redige in florenos, idque vel dividendo per 20 (§. 41.), vel delendo duntaxat ultimam cyphram, & alia dividendo per 2. prodibitque florenorum numerus 5330, quibus 4264 modii appreciantur.

§. 58. **Q**uod si divisione peracta, unitas remaneret, tum loco duarum cyphrarum adjice *quoto* 25; si duo remaneant, adjice eidem 50; si denique tria remaneant, adjice 75. v. g. velis 763 per 25 multiplicare, operare sic:

$$\begin{array}{r|l}
 4 & 763 \\
 & \underline{-36} \\
 & 3 \\
 & \underline{-3} \\
 & 0
 \end{array}
 \quad
 19075.$$

Numerus 19075 erit multiplicationis productum; nam per adjectas duas cyphras denotantur centum, cujus $25 = \frac{1}{4}$ $50 = \frac{1}{2}$, & $75 = \frac{3}{4}$.

CAPUT VIII.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Divisione in compositis.

§. 59. **A**dditio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio in compositis sunt, quæ diversæ speciei numeros, pro sua quosque ratione aut addunt, aut ab invicem subtrahunt, aut multiplicant, aut dividunt.

Eaedem sunt prope regulæ, & demonstrationes specierum

rum compositarum, quæ sunt simplicium, quibusdam paucis observatis, quæ ex sequentibus Problematis illucescent.

PROPOSITIO I.

§. 60. **C**ognoscere ope *Additionis compositæ* summam duorum debitorum, quorum primus A 236 fl. 49 cr. 2 den., alter vero B 101 fl. 35 cr. 3 den. teneatur.

| | fl. | cr. | den. |
|-------|-----|------|------|
| A | 236 | — 49 | — 2. |
| B | 101 | — 35 | — 3. |
| <hr/> | | | |
| | 338 | — 25 | — 1 |

Debitis duobus suo ordine rite collocatis, fiat initium a sinistris, nempe a minima sorte, dicaturque: 3 & 2 denarii sunt 5; quia autem 4 denarii cruciferum efficiunt, igitur tantum 1 denarium adscribe, cruciferum autem, ex 4 demptis denariis obvenerit, pro ordine cruciferorum adserva. Tum sinistram versus procedendo adde juxta (§. 24.) 35 & 49 cruciferos, adjectoque uno prodibit numerus 85; quia vero 85 cruciferi florenum excedunt, ideo divide hos 85 cruciferos per 60, & prodibit unus florenus, remanentibus 25 cruciferis; quos ordini cruciferorum adscribe; florenum autem accessorium serva pro ultimo ordine, & dic juxta (§. 24.) 1 + 101 + 236 = 338. Igitur utriusque debitum est 338 fl. 25 cr. 1 den.

Proba *Additionis* in compositis rite peractæ, fit per *subtractionem compositam*, cujus specimen prioris exempli inverso modo positi mox subsequetur.

PROPOSITIO II.

§. 61. **S**it duorum debitorum summa 338 fl. 25 cr. 1 den. Primus debitor A ex hac summa teneatur 236 fl. 49 cr. 2 den. quæritur: quantum secundus debitor B teneatur?
Ad-

Adscripta summa utriusque debiti, subjunge apto ordine debitum primi A, & initium subtractionis faciendo a primo numero dextimo (§. 28.) dic: 2 denarios ab uno demere nequeo, igitur accommodo cruciferum, facioque punctulum ad frequentem numerum 9. Accommodatum cruciferum resolve in 4 denarios, adjectoque uno, erunt denarii 5. Jam dic: duobus denariis demptis a 5 remanent 3. Hos 3 denarios colloca in denariorum ordine infra lineam, ac procede ulterius sinistram versus; subtrahe 50 (49 enim cum punctulo cruciferum accommodatum notante faciunt 50) a 25, quod cum rursus fieri nequeat, hinc denuo florenum, seu 60 kr. accommodare est necessum, eruntque cruciferi superiores 85. ab his subtrahe 49, & remanebunt 36, quos suo ordine adscribe. Transi ad florenos, & demendo 237 (punctulum quippe ad 6 positum notat accomodatum florenum) a 338, remanebunt 101. Igitur debitum alterius B est 101 fl. 35 crucif. 3 den.

Proba hujus est *Additio* antecedens:

PROPOSITIO III.

§. 62. **A**Nnus solaris decurrit intra 365 dies, 5 horas, & 49 minuta fere; quæritur: quotnam diebus, horis, & minutis constabit triennium?

| <i>dies</i> | <i>hora</i> | <i>minuta.</i> |
|-------------|-------------|----------------|
| 365 | — 5 | — 49 |
| | | 3 |

1095 — 17 — 27 *tempus triennii.*

Hoc fit per *Multiplicationem in compositis*. Ponatur numerus multiplicandus ordine suarum sibi succedentium specierum, ultimo numero minimæ sortis dextrorsum posito subjunge

multiplicatorem 3, atque per hunc multiplicare incipe superiorem (§. 32.) prodibitque minorum numerus 147; quia autem hic minorum numerus horam jam excedit, igitur huncce numerum 147 divide per 60 (tot enim minuta in una hora continentur) & provenient 2 horæ 27 minuta. Minuta suo ordine adscribe, horas pro sequenti horarum ordine reserva; tum multiplica 5 horas per 3, eruntque horæ 15, & adjectis duabus illis horis, quæ divisione priorum minorum prodiverunt, erunt horæ 17. Has rursus suo ordine adscribe. Demum dies 365 per 3 multiplica, factum dabit dies 1095; ita ut tempus triennii sit dierum 1095, horarum 17, minorum 27.

Proba *Multiplicationis compositæ* fit per *Divisionem compositam* de qua mox.

PROPOSITIO IV.

§. 63. **R**escire ope *Divisionis compositæ*: quodnam tempus unius anni solaris esse debeat, si triennium 1095 dies, horas 17, minuta 27 complectitur?

| <i>dies</i> | | <i>hora</i> | | <i>minuta.</i> |
|-------------|-----|-------------|---|----------------|
| 1095 | 365 | 17 | 5 | 27 |
| · 3 | | 3 | | · 120 |
| | | 2 | | · 147 |
| | | 60 | | 3 |
| | | 120 | | 49. |

Ponatur triennii tempus juxta exigentiam suarum partium sibi succedentium. Tum incipiatur a sinistris *Divisio* per 3 (§. 41.) prodibuntque 365 dies. Progredere dextram versus ad numerum 17 dividendum per 3, & prodibunt 5 horæ; remanebit autem fractio seu numerus 2, hunc multiplica per 60 (hora enim una habet 60 minuta) & prodibunt 120. His adde ex tertia statione 27 minuta, & erunt universim 147. Divide ea tandem per 3, eritque factum 49, ita ut Annus solaris 365 dies, 5 horas, 49 minuta habere intelligatur.

Proba hujus est *multiplicatio*.

Ali-

Aliter divisio hujus problematis fit, modo (§. 49.) in-
nuato.

| | <i>dies</i> | — | <i>hora</i> | — | <i>minuta.</i> |
|------------|-------------|---|-------------|---|----------------|
| Divisor 3) | 1095 | — | 17 | — | 27 |
| | 365 | — | 5 | — | 49. |

C A P U T IX.

De Fractionibus Numerorum.

§. 64. *F*raçtio est, qua unam aut plures partes totius, in plures partes divisi, repræsentat.

§. 65. *F*raçtio semper duplicato ordine numerorum scribitur cum interjecta lineola; numerus autem superior dicitur *Numerator*; numerus vero inferior *Denominator* v. g. $\frac{3}{4}$ hæc fraçtio repræsentat 3 partes alicujus totius, in 4 partes divisi. $\frac{7}{9}$ Repræsentat 7 partes alicujus totius, in 9 partes distributi, & sic porro. Potest autem omne quodque totum in plurimas, millesimas insensibilesque partes ita dispesci, ut solo intellectu, & cogitatione eas deprehendere liceat.

§. 66. *F*raçtionis magnitudo colligitur ex ratione *numeratoris* ad *denominatorem*; hinc quo sæpius *numerator* in *denominatore* continetur, hoc *fraçtio* est *minor*, atque ob hanc causam minor fraçtio est $\frac{6}{7}$ quam $\frac{3}{4}$. Rursum $\frac{1}{4}$ minor fraçtio, quam $\frac{1}{2}$. Porro hæc eadem de causa contingit, quod *fraçtio*, in parvis numeris exhibita, eadem sit, & æqualis alteri in magnis numeris comprehensæ; sic fraçtio ejusdem rationis, & æqualis est: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{11}{22}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{13}{26}$, $\frac{14}{28}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{19}{38}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{21}{42}$, $\frac{22}{44}$, $\frac{23}{46}$, $\frac{24}{48}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{26}{52}$, $\frac{27}{54}$, $\frac{28}{56}$, $\frac{29}{58}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{31}{62}$, $\frac{32}{64}$, $\frac{33}{66}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{35}{70}$, $\frac{36}{72}$, $\frac{37}{74}$, $\frac{38}{76}$, $\frac{39}{78}$, $\frac{40}{80}$, $\frac{41}{82}$, $\frac{42}{84}$, $\frac{43}{86}$, $\frac{44}{88}$, $\frac{45}{90}$, $\frac{46}{92}$, $\frac{47}{94}$, $\frac{48}{96}$, $\frac{49}{98}$, $\frac{50}{100}$, &c. Eiusdem etiam rationis sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{11}{22}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{13}{26}$, $\frac{14}{28}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{19}{38}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{21}{42}$, $\frac{22}{44}$, $\frac{23}{46}$, $\frac{24}{48}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{26}{52}$, $\frac{27}{54}$, $\frac{28}{56}$, $\frac{29}{58}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{31}{62}$, $\frac{32}{64}$, $\frac{33}{66}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{35}{70}$, $\frac{36}{72}$, $\frac{37}{74}$, $\frac{38}{76}$, $\frac{39}{78}$, $\frac{40}{80}$, $\frac{41}{82}$, $\frac{42}{84}$, $\frac{43}{86}$, $\frac{44}{88}$, $\frac{45}{90}$, $\frac{46}{92}$, $\frac{47}{94}$, $\frac{48}{96}$, $\frac{49}{98}$, $\frac{50}{100}$, &c. quia nempe toties *Numerator* in unius *denominatore* continetur, quoties alter *numerator* in *denominatore* alterius. Hinc ut *fraçtio* aliqua reducatur, & *minor* quidem sit, ejusdem tamen valoris; oportet numero quodam minore, & *numeratorem*,

& *denominatorem* sic dividi posse, ut nihil ex utroque remaneat.

PROPOSITIO I.

§. 67. *F*ractiones has: $\frac{1}{4}\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}\frac{5}{9}$ ad minores fractiones reducere.

Prima fractionis, tam *numerator*, quam *denominator* per 3 dividantur, & patebit idem esse $\frac{1}{4}\frac{5}{8}$ ac $\frac{1}{12}\frac{5}{8}$ (§. 66.). In *secunda* fiat divisio per 4, & erit $\frac{2}{3}\frac{4}{5}$ idem, quod $\frac{2}{12}\frac{4}{5}$, In *tertia* fiat divisio per 7, & $\frac{3}{4}\frac{5}{9}$ erit fractio æqualis cum $\frac{3}{12}$. Quæ omnia demonstrantur per axioma (§. 13.)

§. 68. **Q**uod si autem numerus reperiri nequeat, quo ad æquate, & *numerator*, & *denominator* dividi possit; seu si *numerator*, & *denominator rationales* non sint, tum fractio illa ad minorem redigi non poterit v. g. $\frac{6}{11}$.

PROPOSITIO II.

§. 69. **S**i numeri *rationales* per eundem numerum v. g. si 3, & 9 multiplicentur per 2, *factorum* erit eadem ratio adinvicem (§. 100, & 106.) quæ fuit numerorum datorum; prodibunt quippe 6, & 18.

Nam sicut se habet 1 ad 3, ita se habent 2 ad 6. Item sicut se habent 3 ad 9, ita 4 ad 12, 5 ad 15. Igitur, & 3 sic se habent ad 9, sicut 6 ad 18 (§. 13.).

§. 70. **D**uas diversorum *denominatorum* fractiones solemus ad tertium aliquem æqualem *denominatorem* revocare, cum *numerator* utriusque multiplicatur per *denominatorem* alterius; *denominatores* autem multiplicantur inter se. Proveniens ex multiplicatione *numeratoris* cum *denominatore* numerus, erit *numerator novus*, ille vero, qui ex multiplicatione *denominatorum* mutua provenit, erit *novus denominator*. Quod si vero animus

mus sit, plures quam duas discrepantes fractiones reducere ad eundem *denominatorem*, tum *denominatores* primum omnes inter se multiplicentur, atque *factum* inde proveniens, erit singularum fractionum *novus denominator*; *Numerator* vero *novus* cujusque fractionis singillatim habebitur, si *novus denominator* per priorem *numeratorem* multiplicetur, & proveniens inde numerus per *denominatorem* priorem rursus dividatur. Facta divisione *quotus* erit novæ fractionis *numerator*. Atque ita necessum esse perspicitur; ubi *novus denominator* est, etiam *novum numeratorem* esse oportere.

PROPOSITIO III.

§. 71. **D**uas has fractiones $\frac{1}{4}$, & $\frac{2}{3}$ si. ad eundem *denominatorem* reducere.

Ponantur ambæ fractiones, se mutuo respicientes. *Numerator* 1 multiplicetur decussatim cum *denominatore* alterius 3, & 3 ponantur infra *denominatorem* 1. eritque hic character 3 *novus numerator*. Mox multiplicetur alter *numerator* 2 de-

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad \times \quad \frac{2}{3} \\ \hline 3 \quad 8 \\ \hline 12 \quad 12 \end{array}$$

cussatim per *denominatorem* alterius 4, & factum 8, exinde proveniens, ponatur infra *numeratorem* 2, eritque pariter *novus numerator*. Tandem multiplicentur *denominatores* ambo inter se, nempe 4, & 3, & *factum* prodiens 12 erit utriusque *novus denominator*, ita ut $\frac{1}{4}$ totidem sit ac $\frac{3}{12}$, & $\frac{2}{3}$ totidem ac $\frac{8}{12}$ (§. 66.) Sic reductæ fractiones facile insimul addi possunt; tres enim, & octo duodecimæ partes si addantur, erunt $\frac{11}{12}$. Jam concipiatur florenus habere 12 partes, ex quibus 11 habeas, quæ 11 partes efficiunt 55 cruciferos; Quia nempe si 55 per 5 dividantur, *quotus* erit 11; si vero 60 per 5 dividantur, *quotus* erit 12, qui est totus florenus; Igitur $\frac{1}{4}$, & $\frac{2}{3}$ floreni continent 55 cruciferos.

Quomodo autem una *fractio* ab altera inverso modo subtrahi possit, pronum est cuivis assequi (§. 28.) Fra-

Fractionem Fractionis, vel etiam plures fractiones fractionum ad unam reducere fractionem.

Numeratores insimul multiplicentur, primus cum secundo, hujus productum cum tertio, & sic porro. Idem fiat cum denominatoribus. Utrumque productum ceu una fractio jungatur, & habebitur quæsitum. v. g. Habeas tres quartas seu $\frac{3}{4}$ duarum tertiarum $\frac{2}{3}$ unius floreni, habebis medium florenum seu 30 cr.

PROPOSITIO IV.

§. 72. **H**As fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$ ad eundem *denominatorem* reducere.

Omnes tres *denominatores* insimul multiplicentur, prodibit factum 616. hic numerus erit novus omnium trium *fractionum* denominator. *Prima* vero *fractionis* ut repariatur *novus numerator*, multiplica 616 per 3, & factum divide per 8, quotus proveniens erit 231; itaque erit $\frac{1}{3} = \frac{231}{616}$. *Secundam fractionem* quod attinet, rursus multiplica 616 per 5, & factum divide per 7, prodibitque quotus 440. Hic erit *numerator* secundæ fractionis, & erunt $\frac{5}{7} = \frac{440}{616}$. In *tertia fractione* eodem modo operare: multiplica 616 per 6, factum divide per 11, eritque quotus seu *novus numerator* 336, adeoque $\frac{6}{11} = \frac{336}{616}$. Qui omnes *numeratores* novarum fractionum si sibi addantur, atque per *novum denominatorem* dividantur, prodibit 1 totum, & $\frac{1}{3} \frac{5}{7} \frac{6}{11}$.

Nam *novus denominator*, priorum *denominatorum* multiplicatione factus, omnes priores *denominatores* complectitur, tanquam partes; atqui exinde sciri potest beneficio *divisionis*, quantum valeat $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$: ergo accedente multiplicatione *numeratorum* pariter inpotescit: quid contineat ex novo illo *denominatore* $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$. *Quod erat demonstrandum.* §. 73.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{11} \\ \hline \frac{231}{616} \quad \frac{440}{616} \quad \frac{336}{616} \end{array}$$

§. 73. **M**ultiplicatio fractionum sic fit ; Numeratores fractionum multiplicantur invicem , uti & denominatores ; quod si numerator novus major sit , quam denominator , dividatur numerator per denominatorem. Sit Problema

PROPOSITIO V.

§. 74. **R**escire , quotnam florenos cæsareos valeant 236 aurei Hollandici , si cujuslibet aurei Hollandici pretium est $4\frac{1}{8}$ fl. seu 4 fl. $7\frac{1}{2}$ Crucif.

Scribatur primo a sinistris pretium unius aurei $4\frac{1}{8}$ fl. ; hoc vero pretium resolvatur per denominatorem , & erunt $\frac{33}{8}$. a dextris ponantur aurei in hac fractione $2\frac{1}{2}$. Multiplicentur denominatores invicem , uti & numeratores. Factum ex numeratorum multiplicatione prodibit 7788 ; hoc dividatur per denominatorem 8 , & erit quotus $973\frac{1}{4}$ seu $\frac{1}{2}$; ita ut 236 aurei Hollandici æquipolleant 973 florenis cæsareis , & 30 Crucif.

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{8} \\ \underline{33} \quad \text{---} \quad \frac{236}{8} \\ 8 \quad \text{---} \quad \frac{1}{1} \end{array}$$

$$7788 \quad \Big| \quad 973\frac{1}{4} , \text{ seu } \frac{1}{2}$$

§. 75. **D**ivisio fractionum , quando nempe indagatur : quoties una fractio in altera contineatur , hac ratione peragi solet : fractio , per quam divisio fieri debet , ordine inverso ponitur , ut numerator in denominatoris , & denominator in numeratoris loco sit. Quo facto multiplicantur invicem duo superiores numeri , atque etiam duo inferiores : Quod si vero tota quadam adjuncta sint fractionibus , hæc in denominatorem ducuntur , neque necessum est ordinem variari.

PROPOSITIO VI.

§. 76. **O**pe divisionis rescire : quoties $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$ contineatur?
 Adscribatur fractio $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

dividens $\frac{2}{3}$ inverfo modo nempe $\frac{3}{2}$, & ex dextra parte $\frac{4}{5}$. multiplicentur *numeratores* ad invicem, atque etiam *denominatores*, prodibunt $\frac{4}{5}$. *Numerator* per *denominatorem* dividitur, & provenit 1 totum & $\frac{2}{5}$, seu $\frac{7}{5}$.

PROPOSITIO VII.

§. 77. **S**I quis habeat 2 $\frac{4}{5}$ Centenarios plumbi, velitque ex eis globos sclopetarios formare; dum plumbum super igne liquat, deperditur ex eo $\frac{1}{5}$ Centenarii. Quæritur: quotnam ex residuo plumbo globos formare queat, ut tamen singuli globi $\frac{2}{3}$ libræ appendant?

Primo 2 $\frac{4}{5}$ centenarii resolvantur in libras, prodibuntque 244 $\frac{4}{5}$ libræ (unus enim Centenarius continet 100 libras) Rursus $\frac{1}{5}$ Cent. resolvatur in libras, & prodibunt 12 $\frac{1}{2}$ libræ. Uterque librarum numerus resolvatur cum suæ fractionis *denominatore* per multiplicationem, & prodibunt ex finistimo $\frac{25}{2}$, ex dextimo autem $\frac{2200}{9}$.

Jam ut ad eosdem *denominatores* utraque fractio reducatur, multiplica utrumque *numeratorem* per *denominatorem* alterius, & prodibit finistimus *novus numerator* 225; dextimus vero

| | |
|-----------------------|---------------------------|
| $\frac{1}{5}$ Cent. | $2\frac{4}{5}$ Cent. |
| $12\frac{1}{2}$ libræ | $244\frac{4}{5}$ libræ |
| $\frac{25}{2}$ | $\frac{2200}{9}$ |
| 2 | 9 |
| $\frac{225}{18}$ | $\frac{4400}{18}$ |
| $\frac{2}{7}$ | $\frac{4400}{225}$ |
| 7 | $\frac{4175}{18}$ |
| $\frac{36}{1}$ | $\frac{29225}{18}$ |
| | 811 $\frac{29}{36}$ globi |
| | $\frac{29}{36}$ |

4400;

4400 ; novus demum *denominator* ex multiplicatione utriusque inter se, nempe 18. Nunc minor *numerator* 225 nempe $\frac{1}{8}$ Centenarii, quæ deperdita est, subtrahitur a majori 4400, & remanebunt 4175. Porro hanc fractionem $\frac{4175}{18}$ reduc ad eundem *denominatorem* cum pondere unius globi sclopetarii nempe cum $\frac{2}{3}$ libræ, & decussatim multiplicando *numeratores* cum *denominatoribus* prodibit novus *numerator* finissimus 36, dextimus vero 29225. Divide rursus dextimum *numeratorem* per sinistimum, & prodibit factum $811\frac{2}{3}$. Tot nempe globi sclopetarii, quorum quilibet $\frac{2}{3}$ libras appendit, formari ex illo liquato plumbo poterunt. Fractio vero denotat globum minoris ponderis quam $\frac{2}{3}$ libræ.

C A P U T X.

De Regula Trium, & Proportione Numerorum.

§. 78. *Regula Trium*, quæ & *aurca* vocatur, docet ex datis tribus numeris *proportionalibus* in cognitionem quarti itidem *proportionalis* devenire.

Respicit itaque *Regula Trium* proportionem, quod nempe quartus numerus, qui quæritur, talem proportionem ad tertium habere debeat, qualem habet secundus ad primum.

§. 79. *Regula Trium* ita peragitur : duo numeri, quorum nota est ad invicem *proportio*, adscribuntur, incipiendo a sinistris, ut virgula sit inter utrumque interjecta : post secundum, mediante pariter virgula, adscribitur tertius, cujus numerus *proportionalis* quæritur, qui eodem modo se habeat ad tertium, sicut secundus ad primum ; Tum vero tertius numerus multiplicatur per secundum, ac *productum* dividitur per numerum primum. Quotus, inde qui provenit, exprimit quartum numerum quæsitum, qui talem proportionem ad tertium habet, qualem secundus ad primum.

Notæ, quibus proportio exprimitur, assumuntur hæc, nempe $3 \cdot 6 :: 4 \cdot 8$. Vel in literis. $a \cdot b :: c \cdot d$. Id est: sic se habet 3 ad 6, sicut 4 ad 8. vel: sic se habet a ad b, sicut c ad d.

PROPOSITIO I.

§. 80. **R**escire: quantum mercedis perciperent indies 28 operarii, si septem operariis diurna solutio obtin- git 11 fl.

| Primum dicatur: | Operarii | fl. | Operarii. |
|--|----------|-----|-----------|
| 7 Operarii habent 11 flo- renos mercedis diurnæ, quantum habebunt 28 operarii, æquali mer- cede persoluti? hoc ad- | 7 --- | 11 | --- 28 |
| | . | 28 | |
| | . | 308 | 44 fl. |
| | . | . | |

scribatur uti (§. 79) præceptum est. Multiplicentur 28 per 11, factum erit 308, hoc dividatur per 7, & prodibit quotus 44 floreni, seu merces 28 operariorum diurna, atque hi 44 floreni talem expriment *proportionem* ad 28 operarios, qualem 11 floreni ad 7 operarios.

Nam *secunda positio* nempe 11 exhibet æqualem 7 operariorum solutionem; ergo & *quartus* numerus exhibere debet æqualem 28 operariorum solutionem. Dum multiplicantur 28 per 11, prodit numerus 308, id est: quod singuli operariorum perciperent indies 11 florenos (§. 32.) Hæc autem cum *proportio* nulla sit ad 7 operarios, percipientes indies 11 florenos, ideo fit *proportio*, & non uni, sed septenis dicuntur indies 11 floreni æqua distributione obvenire, dividiturque summa 308 per 7, quod demonstrat numerum *proportionalem* ad 28 (§. 41), & factum 44 toties continet 28, quoties 11 complectuntur 7.

§. 81. **P**ROba fit passim *inversione* positionum, dicendo v. g. 28 operarii percipiunt 44 florenos, quotnam percipient 7 operarii? facta operatione (§. 79). prodibit denuo numerus 11.

§. 82. **D**Um compositæ species, vel fractiones in *Regulam Trium* incurrunt v. g. 7. operarii percipiunt 11. fl. 15. crucif. aut 7 operarii percipiunt 11 $\frac{1}{4}$ fl. quotnam percipient 28 operarii æqua distributione? tunc necessum est, *secunda positionis* florenos, aut in meros cruciferos, aut in meas quartas partes resolvi. Hoc *productum* si per *tertiam positionem* juxta §. 79. multiplicatum fuerit, & *factum* proveniens rursus per *primam positionem* divisum, prodibit *quotus*, qui denuo vel per cruciferos 60, vel per *quartas partes* dividi debet, ut floreni, merces diurna 28 operariorum, inveniantur.

§. 83. **R**egula Trium passim adhiberi solet ad cognoscendas fractiones, v. g. ad Cr.
cognoscendum valorem $\frac{4}{9}$ fl. 9 --- 60 --- 4
dico : 9 sunt 1 fl. seu 60 Cru-
ciferi, quot erunt 4? Jux-
ta leges (§. 79) procedendo,
provenit numerus 26 $\frac{2}{3}$ Cr.

$$\begin{array}{r|l} 240 & \\ -60 & \\ \hline 180 & \\ \hline 6 & \\ \hline \frac{6}{9} & \end{array} \quad 26 \frac{2}{3} \text{ vel } \frac{2}{3} \text{ Crucif.}$$

§. 84. **A**lius quoque modus est percommodus, *Regulam Trium* præsertim in compositis practice instituen-
di. Sit

PROPOSITIO II.

DUæ libræ aromatum valeant 8. fl. 12 grossos, quid constabunt 16 libræ 12 lotones?

| | <i>libra</i> | <i>flor.</i> | <i>grossi</i> | <i>libra</i> | <i>lot.</i> |
|--|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| Primum 8 floreni, | 2 | --- | 8 | --- | 12 |
| & 12 grossi per 2 libras dividantur, & | | | 4 | --- | 6 |
| erit <i>productum</i> 4 fl. 6 | | | 4 | --- | 16 |
| grossi pretium nempe unius libræ. Hoc multiplicetur per 16. | | | 64 | | |
| 6 grossi quidem decies sexies multiplicati, efficiunt 4 fl. | $\frac{1}{4}$ | | 1 | --- | 1 |
| 16 grossos : 4 floreni autem toties multiplicati efficiunt 64 florenos. | $\frac{1}{4}$ | | // | --- | 10 |
| Jam ad valorem 12 lotonum deveniendo : pretium unius libræ nempe 4 fl. 6 grossos divide per 4. & habebis productum 1 fl. 1 grossum $1\frac{1}{2}$ Cr. pretium 8 lotonum, seu quadrantis unius libræ ; quia autem ad numerum 12 lotonum adhuc 4 lotones deficiunt, igitur divide rursus 1 fl. 1 grossum $1\frac{1}{2}$ Cr. per 2, & erit productum 10 grossi $2\frac{1}{4}$ Cr. pretium 4 lotonum. Quæ omnia, si addita sibi fuerint, prodibit pretium 16 librarum, & 12 lotonum, nempe 70 floreni 8 grossi $\frac{1}{4}$ Cr. seu 3 denarii. Et hæc operandi ratio vel ideo per jucunda videri debet, quod statim simul oculis subjiciatur ; quid 1 libra, quid quadrans libræ, seu 8 lotones, quid 4 lotones consent ? | | | 70 | --- | 8 |
| | | | | --- | $\frac{1}{4}$ |

§. 85. **P**Ræter *Regulam Trium directam*, nunc expositam, habetur etiam alia *Regula Trium inversa*. Hujus *Regula inversa* talis est positio, ut *terminus tertius* ponatur *primo loco*, & *primus terminus* loco tertio ; tum duo *priores termini* invicem multiplicantur, *factumque* inde proveniens dividitur per *ultimum*. *Quotus* manifestabit numerum quæsitum.

§. 86. **Q**Uoniam vero tyrones sæpe hærent ad *propositionem datam* ; nescientes : an *Regula directa*, an *inversa* utendum sit ? igitur sequenti se observatione communitate est opus : Quotiescunque ex ipsa quæstionis natura accidit, ut quanto major *terminus tertius* est *primo*, tanto minor pro-

prodire debeat terminus *quartus secundo*, vel vicissim: quo minor terminus *tertius* est *primo*, tanto major terminus *quartus* prodire debeat *secundo*, toties adhibenda est Regula *proportionum inversa*; cum alias in *directa* regula proportionum, quanto major est terminus *tertius* primo, tanto quoque terminus *quartus* esse major debeat *secundo*; aut: quanto minor terminus *tertius* est *primo*, tanto minor provenire debeat terminus *quartus*, quam sit *secundus* juxta *Proposit. 14. Euclidis lib. V.* Sit

PROPOSITIO III.

§. 87. SI 63 murarii ædificium intra 105 dies absolverunt, quotnam diebus laborassent, æquali contentione usi, si fuissent tantummodo 15 Operarii?

Dicatur primum: 63 operarii laborarunt 105 dies, quot diebus 15 operarii opus perfecissent? debent autem hæ tres positiones ita considerari, quasi vero inquireretur in proportionalem, ad terminum. 63. Hoc adscripto, multiplicentur 105 per 63 juxta (§. 85.) factum dividatur per 15, & quotus proveniens significabit dies 441, quibus 15 operarii ædificium compleffent. Quæ est *proportio inversa*, ut nempe numerus *primus* inventus tanto major sit *tertio* nempe 105, quanto proportionaliter *secundus* 63 major est quarto 15. Quod erat inquirendum.

| Operarii | dies | Operarii. |
|-----------------|-------------------|---------------------|
| $\frac{63}{15}$ | --- 105 ... 63 | --- $\frac{15}{63}$ |
| 15 6615 | | 441 dies |
| 61 | | |
| 15 | | |

NOTÆ ALGEBRAICÆ.

PRoblemata ejuscemodi, ad *Regulam Proportionis* pertinentia percommode in Algebra solvuntur beneficio *aquationum*. Est autem *aquatio*, duarum quantitatum comparatio, qua signo *aqualitatis* = conjunguntur. Veluti: Interrogatus quispiam, quanam hora ante-

me-

meridiana lycaum accedere soleat? Respondet: ea hora, ad quam hora a duodecima noctis elapsa se habent ad horas usque ad meridiem residuas, ut 5 ad 1. *Quæritur: quamnam sit illa hora?* Dicuntur autem horæ illæ incognitæ, a media nocte elapsæ X, & horæ a media nocte usque ad meridiem = 12; Horæ autem incognitæ X, a media nocte elapsæ, habent se ad horas 12 nempe usque ad meridiem — X, sicut 5 ad 1. Jam in Proportione *Geometrica* factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis. (§. 107.) Igitur $1 X = 60 - 5 X$; Rursus quia $1 X = 60 - 5 X$, igitur etiam $6 X = 60$: Igitur $1 X = 10$.

$$\begin{array}{r} X. \quad 12 - X : : 5. 1 \\ \quad 1 X = 60 - 5 X \\ \quad 6 X = 60 \\ \quad \quad 60 \\ \quad X = \frac{60}{6} = 10. \end{array}$$

Igitur hora decima matutina accedere ad lycæum solet. Aut in terminis generalibus, prout dictum in notis *Capitis Primi*

$$\begin{array}{r} X. \quad A - X : : M : N \\ \quad NX = MA - MX \\ \quad NX + MX = MA \\ \quad X = \frac{m a}{m + n} \end{array}$$

Alia præterea problemata Algebraicis æquationibus expediuntur, quæ alias resolvi nequeunt per regulam simplicem proportionis; veluti: *Eques 100 passibus distans a cursore, cursorem insequitur ea velocitate, qua se habeat ad velocitatem cursoris ut 7 ad 6. Quæritur: post quodnam spatium Eques ille sit cursorem affecuturus?* Distantia cognita 100 passuum vocetur A, spatium, quod interea absolvit cursor, vocetur X

$$\begin{array}{r} A + X . X : : 7. 6 \\ \quad 6A + 6X = 7X. \\ \quad 7X = 6X - 6A \\ \quad X = \frac{6a}{7-6} \end{array}$$

Ideo-

Ideoque eques ille assequetur cursum post 700 passus ;
Nam $X = 600$, & $A = 100$: Igitur $A + X = 700$.

Est enim *aquatio* : *Expressio ejusdem valoris sub nomine diverso* ;
veluti cum dico 48 divisa per 6 dant 8. Hæc propositio
in æquatione sic exprimitur $\frac{48}{6} = 8$; ubi apparet *aquatio-*
nem exprimi mediante signo $=$ inter duos valores æquales,
diversis tamen nominibus. Termini, qui sunt a sinistris signi
 $=$, constituunt primum *aquationis* membrum ; illi vero termi-
ni, qui a dextris sunt ejusdem signi $=$ constituunt *aquationis*
membrum secundum.

§. 88. **E**st & alia adhuc ex *Regula Trium* enata regula, quam
regulam auream compositam, seu regulam *de quinque* no-
minamus ; Hæc regula *de quinque* nihil fere aliud est, quam
duplicata *Regula Trium* : quando nempe ex *quinque* numeris da-
tis sextus quaeritur. Fit autem hæc regula *de quinque* duplici
modo. *Primo* : per duplicem positionem *regulae trium*. *Secundo* :
fiunt *quinque* positiones, quarum utrinque duæ infra se invi-
cem positæ sunt, & *quinta* in medio ; multiplicantur autem duo
sinistimi inter se, uti & duo dextimi. Tum *factum* quod a
dextris est, multiplicatur cum medio numero ; inde prove-
niens *productum* dividitur cum sinistimo, & *quotus* erit numerus
sextus quaesitus.

PROPOSITIO IV.

§. 89. **S**I pro vectura 6 centenariorum ad 5 miliaria 12 flo-
reni persolvi debent, rescire : quantum solvere ne-
cessum sit pro devectione 30 centenariorum ad 18 miliaria ?

Cui lubitum fuerit operari primo modo (§. 88.) nempe
usurpatione duplicis *regulae trium*, ille primum juxta (§. 79.)
adscribat tres has positiones nempe $6 - 12 - 30$, & prodibit

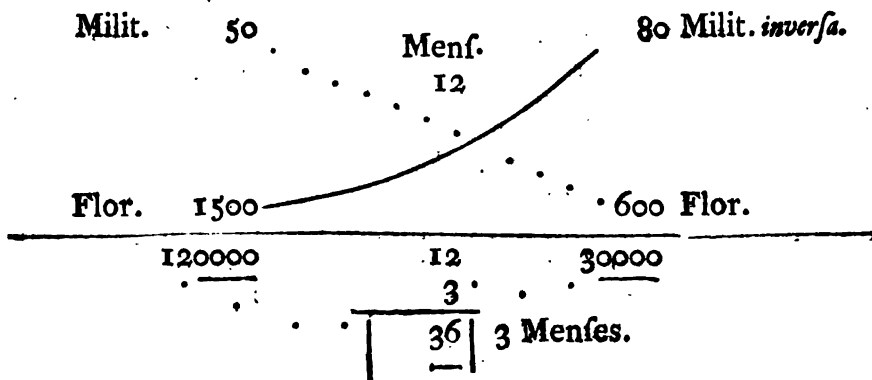
mi termini collocatur inferius ad dextram, id est, loco tertio: Media positio semper suo in ordine persistat, cui etiam sextus terminus, qui requiritur, correspondere debet.

§. 92. **A**Tque omnes hæc insinuatæ cautelæ nihil quidquam obsistunt, quo minus Regula hæc *inversa* de quinque sit quoque regula proportionis; quamvis enim in problematis enunciatione *tertius*, & *sextus* terminus non sint homogenei, in operatione tamen ita proceditur, ut *tertius* *sexto* homogeneus fiat, atque inter utrumque *inversa* intercedat proportio. Jam ad praxim descendamus. Assumatur problema mox insinuatum

| | | |
|-----------|----|------------|
| Mil. 50 | | 80 Milites |
| | 12 | |
| Flo. 1500 | | 600 Flor. |

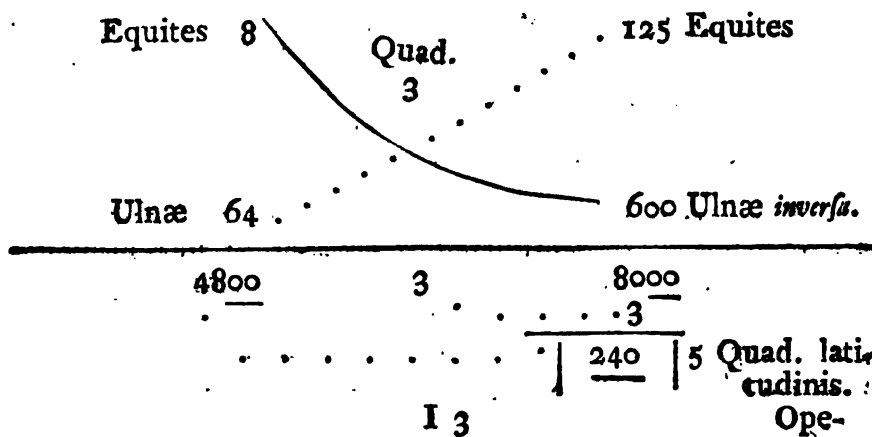
Hocque simplici dispositione. adscriptum examini subjiciatur: 50 milites sustentantur annue certa quadam summa pecuniæ (præscindendo ab inferioribus) poteruntne etiam 80 milites tamdiu eadem pecuniæ summa sustentari? Igitur, cum ad tempus quæstio collimet, patescet examinanti: non posse 80 milites eadem pecunia duodecim mensium spacio sustentari; itaque inferatur juxta (§. 86.) hanc esse *inversam* propositionem. Pergatur ad inquisitionem inferiorum terminorum, dicendo: si certus militum numerus (abstrahendo a superioribus) 1500 florenis spatio 12 mensium victitant, poteritne idem numerus militum 12 mensibus sustentari ære 600 florenorum? Sanus profecto quisque judicabit, certum illum numerum militum breviori tempore victitaturum pecunia sexcentorum florenorum, quam 1500 fl. victitasset; igitur cum numerus 600, minor sit, quam 1500, cumque etiam minus tempus prodire oporteat, propositio inferiorum terminorum non erit *inversa* (§. 86.) Jam vero ducatur linea decussatim a 1500 ad 80; punctula autem ducantur itidem decussatim a 50 ad

ad 600 juxta (§. 91.) Num. I. prodibitque factum 3 mensium, quibus 80 milites ære 600 florenorum queant sustentari.



Problema secundi generis, in quo sola inferior propositio est *inversa* (§. 91.) Num. II.

Præfectus equestris aliquando emit 64. ulnas panni, tres ulna quadrantes in latitudine continentis, atque ex hoc panno 8. equitibus equalia pallia confecta fuerunt; Recens vero emit 600 ulnas panni, atque ex hoc 125 equitibus pallia, equalia prioribus, conficiebantur. Queritur: cujusnam latitudinis pannus secundus fuerit?



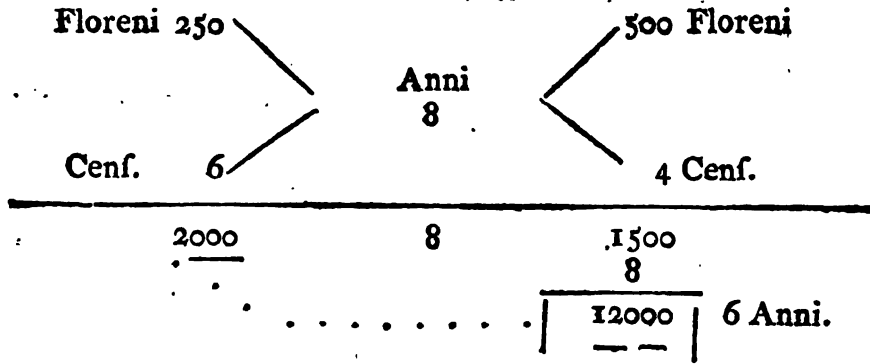
Operatione juxta (§. 91.) *Num. II.* instituta prodibit, latitudinem fecundi panni 5 quadrantum fuisse.

Nam primo nemo non videt, superiores terminos præscindendo ab inferioribus, non esse *inversos*, cum numerus dextimus Equitum seu palliorum procurandorum sit major sinistro, & major etiam latitudo panni requiratur, adeoque superfluum foret examinare. Examen trium terminorum inferiorum sic instituitur: si 64 ulnæ, quarum quævis tres quadrantes latitudinis continet, sufficiant ad certum palliorum numerum conficiendum, eritne necessum, ut, si 600 ulnæ emantur pro eodem certo palliorum numero, quævis ejusmodi ulna tres pariter quadrantes latitudinis complectatur? Dictabit profecto cuivis Judicium, suffecturas quam maxime 600 ulnas panni palliis illis certis conficiendis; etsi latitudo panni esset minor tribus quadrantibus; itaque cum minor latitudo panni requiratur, independenter a superioribus terminis, clarum est, positionem inferiorum terminorum esse *inversam*, ideoque etiam lineam a sinistro superiore ad inferiorem dextimum esse adjectam (§. 91.) *Num. II.*

Sequitur Problema tertij generis; cujus nimirum, & superiores, & inferiores termini sint *inversi*. *Cajus elocat Capitale 250 florenorum pro annis 8 subsequituris ad censum, hac conditione, ut singulis annis centum floreni 6 fructificent. Sempronius item elocat 500 florenos, a 4 pro centum, vultque tamdiu pecuniam hanc suam in censu elocatum, donec census seu interesse proveniens convenientem octo annorum censum Caji adaquet. Queritur itaque: quot annis hanc sempronii pecuniam in censu elocatum esse oporteat, donec petitionem detur assequi?*

Examen: si 250 floreni ad censum octo annorum spatio debeant elocari, quanto tempore elocabuntur ad censum floreni 500? Respondebis utique: tempore breviori. Igitur superiorum terminorum propositio est *inversa* (§. 86.) cum nempe sit major summa floreni 500, quam sint floreni 250, brevius vero tempus per computum elicere oporteat. Rursum:

si 6 floreni redeant ex censu annuo 100 florenorum ad possessorem per annos 8, sufficetne idem 8 annorum tempus, ut certa illa summa pecuniæ, a 4 duntaxat pro centum elocata, censum priori æqualem fructificet? Respondebis illico: non sufficere, sed longiori tempore esse elocandum capitale, cujus annuo censu 100 floreni 4 fructificant, quam si idem ipsum capitale elocaretur, a 6 pro centum. Igitur, & propositio inferiorum terminorum erit pariter *inversa*. Utere regulis (§. 91.) Num. III. præscriptis, & operare.



Terminus itaque sextus proportionalis, ex problemate hoc *de quinque inverso* proveniens, sunt 6 anni, quibus significatur, quemadmodum ex 250 florenis, a 6 pro centum elocatis, intra spatium octo annorum census provenit 120 floreni; ita hic idem census provenit ex 500 florenis, a 4 pro centum, spatio 6 annorum elocatis.

Longior forte, quam par erat, fuit Regulæ hujus *de quinque inversa* expositio; malui tamen in regulæ tam necessariæ tamque intricatæ tractatione esse paulo prolixior, quam manuductioni deesse, tyronumque animos in ancipiti suspensos præterire.

DEFINITIO.

§. 93. *R*atio est duorum vel plurium numerorum *mutuus respectus*. Vel: est *habitus unius quantitatis ad aliam, modum exprimens, quo altera alteram contineat, vel ab illa contineatur.*

§. 94. *E*st autem *ratio duplex: Arithmetica, & Geometrica.* *Arithmetica ratio est, differentia illa, ope subtractionis investigata, quæ inter numeros est. v. g. inter 2, & 5. Est duplex, continua, & discreta. Continua est, dum continuo eadem differentia inter succedentes sibi numeros intercedit, v. g. 2. 5. 8. 11. 14. &c. diciturque etiam progressio Arithmetica. Discreta est, quæ interrumpitur v. g. 2. 5 = 7. 10 = 9. 12 &c. & vocatur proportio Arithmetica.*

§. 95. *M*ultiplicitas permutationum, quæ inter quasdam unitates, permutato semper earum ordine, institui possunt, invenitur multiplicatis in se. mutuo numeris *progressionis Arithmetica naturalis* v. g. velis scire: si septem Planetæ indies aliâ, & aliâ serie seu ordine constituerentur, quot anni effluerent; usque dum omnis eorum *permutatio* esset evoluta?

Multiplicatis invicem seriei naturalis septem numeris, productum erit 5040, hoc dividatur per anni dies 365, & habebitur summa annorum nempe 13 anni, & aliquid supra 9 menses.

1

2

3

4

5

6

7

§. 96. *H*armonica *proportio Arithmetica* reperitur ad plures numeros

5040

Arithmetica progressionem ascendentes hac ratione. v. g. sit ad numerum 2, 5, 8. Item 3, 4, 5.
10, 16, 40. 12, 15, 20.

Primus numerus 2 multiplicetur per *secundum* 5, & habebitur

tur primus *harmonicè proportionalis* 10. Item *primus numerus* 2 multiplicetur per *tertium* 8, & habebitur *secundus numerus harmonicè proportionalis* 16. Denique *secundus numerus* 5 multiplicetur per *tertium* 8, & habebitur numerus *tertius harmonicè proportionalis* 40 &c. Et sic porro de aliis.

§. 97. **R**atio Geometrica est illa multiplicitas, quoties minor aliquis numerus in majori continetur. v. g. 2 ad 3, & 6. Est pariter duplex *continua*, & *discreta*. *Continua*, quæ & *progressio Geometrica* dicitur, est, dum plures numeri *Geometrica ratione* progrediuntur. v. g. 3. 6. 12. 24. 48. 96 &c. Et hæc notatur per præfixum signum \div .

§. 98. **M**axima est numerorum per *continuum* hanc *progressionem Geometricam* multiplicatio. Saffa Dahir Indus latrunculorum lusus inventor fertur a Scheramo rege suo, quem, & regulas illius lusus edocuit, præmii loco petiisse tot tritici grana, quot provenirent, si ponendo unum granum ad primam areolam illius lusus, *continua progressionè Geometrica* multiplicarentur grana per 64 areolas, quas tabula illius lusus exhibet, & compertum est inito calculo: huic petitioni Saffæ, quæ primum quidem exigua regi videbatur, omne totius Orbis terrarum triticum non fuffecturum.

§. 99. **R**atio Geometrica *discreta* est, quæ etiam *Proportio Geometrica* appellatur, cum numeri *Geometrica ratione* progredientes, interrumpuntur v. g. 3. 6 = 4. 8. = 5. 10 &c. seu 3. 6 :: 4. 8, & : 4. 8 :: 5. 10 &c. toties nempe 4 in 8, quoties 5 in 10 continetur &c.

§. 100. **I**n *ratione Geometrica* ille numerus, qui indicat, quoties minor in majori contineatur, appellari consuevit *exponens rationis*; neque differt a numero *quoto*, ut in *divisione* notatur (§. 41.).

§. 101. *Proportio* alia est *æqualitatis*, alia est *inaequalitatis*. *Proportio æqualitatis* tunc habetur, cum unus numerus aut quantitas alium adæquat v. g. $3 \times 4 = 12$, & $6 \times 2 = 12$. *Proportio inæqualitatis* est, dum alter duorum numerorum alterum excedit. Hæc autem rursus duplex est: *rationalis*, & *irrationalis*. *Rationalis* est, quæ numeris exprimi potest. v. g. *Proportio* inter 3, & 9 *rationalis* est; etenim prior numerus a posteriore ter superatur. *Irrationalis* est, quæ numeris exprimi nequit. v. g. *Proportio* inter 3, & 10. Non potest enim hæc *proportio* numeris exprimi, sed est necessum *fractionem* adhibere.

§. 102. *Ratio composita* est, cujus *exponens* est productum ex multiplicatis inter se aliarum *exponentibus*. Seu: quæ fit, cum non tantum *antecedentes*, sed etiam *consequentes rationes* in se ducuntur, & *novam rationem* efficiunt. v. g.

| | | |
|-----------------|----|----|
| Prima ratio fit | 3. | 6. |
| Secunda | 4. | 8. |

3 Ducuntur in 4, & productum erit 12, 6 ducantur in 8, & erit productum 48. *Ratio* 12 ad 48, dicitur *ratio composita* ex *ratione* 3 ad 6, & ex *ratione* 4 ad 8.

§. 103. *Aliud* est autem *ratio dupla*, aliud *ratio duplicatæ rationis*. *Ratio dupla* est in 6 ad 3; 6 enim est numerus duplus ad 3. *Ratio autem duplicatæ rationis* est, quando *rationes componentes* sunt æquales, seu ejusdem proportionis v. g. 2. 4.
3. 6.

duo numeri antecedentes in se invicem ducti nempe $2 \times 3 = 6$; & consequentes pariter in se ducti mutuo nempe $4 \times 6 = 24$. est *ratio duplicatæ rationis* 2 ad 4, vel 3 ad 6, quarum altera alteri æqualis est

§. 104. *Itaque* quotiescunque datur *ratio* numeri ad numerum ut 2 ad 4, & debeat inveniri *ratio duplicatæ rationis*, tunc oportet illi *rationi numericae* aliam *rationem* adjungere,

gere, ut $2. 4 :: 3. 6$; ductis deinde, & *antecedentibus* in se invicem, & *consequentibus*, habebitur ratio *duplicata rationis* 6 ad 4. Hi numeri reducuntur ad minimos *exponentes*, i. e. 4. qui quadrati sunt, nam

$$2. 4 :: 3. 6.$$

$$1. 2 :: 1. 2$$

cum tam *antecedentes* æquales, quam *consequentes* inter se multiplicentur. Ex hac multiplicatione ejusdem numeri per se ipsum habetur *ratio duplicata* seu *numeri quadrati*.

§. 105. **D**UO numeri seu magnitudines sunt in *ratione subduplicata* aliorum duorum numerorum, quando ea est illorum *ratio*, ut si semel in seipsam ducatur, *ratio* duorum illorum datorum numerorum confurgat. In *subtriplicata* vero *ratione* dicuntur esse, cum eorum *ratio* hujusmodi est, ut *duplicata* in se ipsam ducta, *rationem* illorum aliorum numerorum efficiat. Ex quo habetur: *exponentem rationis subduplicatae esse quadratam radicem; exponentem vero rationis subtriplicatae esse cubicam radicem exponentis datæ rationis.*

Signum *æqualitatis* est $=$. Signum similitudinis \propto . \triangleright notat majus ad minus. \triangleleft notat minus ad majus.

A X I O M A.

§. 106. **S**I duæ *rationes* eidem tertiæ æquales fuerint, sunt etiam æquales inter se.

Nam *exponentes* earundem *rationum* sunt æquales v. g. $2. 3 = 6. 9 = 8. 12$. Ratio enim *exponens* harum omnium est sicut 2 ad 3. Itaque si $2. 3 = 6. 9$. & $2. 3 = 8. 12$. *Etiam* $6. 9 = 8. 12$.

§. 107. **E**X majori itaque vel minori *ratione* cognoscitur etiam, quænam quantitas sit altera quantitate aut major, aut minor. Quod ex sequenti *theoremate* elucet.

Sint quantitates A, B, C. A habeat majorem *rationem* ad B, quam ad C. Dico: quantitatem B minorem esse, quam quantitatem C.

Etenim, cum ex hypothesi A majorem *rationem* habeat ad B, quam ad C; igitur pars aliqua ipsius A, quæ E dicatur, habebit eandem *rationem* ad B, quam ad C. id est: *ratio*, quam habet E ad B, erit æqualis rationi, quam habet A ad B. Præterea *ratio* E ad A est æqualis rationi B ad C: atqui $E < A$. Igitur etiam $B < C$. *Quod erat demonstrandum.*

Sic etiam vicissim dicitur: Idem A ad majus C minorem *rationem* habet, quam ad minus B; quia nempe $C > B$, erit etiam $A : C < A : B$. Itaque A ad majus C minorem habebit *rationem*, quam ad minus B.

Porro, si duæ quantitates sint A, & B. quarum A ad tertiam quantitatem C majorem *rationem* habeat, quam B ad tertiam illam quantitatem C; harum prima A erit major, quam B.

Nam pars aliqua majoris A habebit eandem *rationem* ad C, quam ipsa quantitas minor B ad C; igitur pars ipsius $A = B$, & per consequens $A > B$; Quod enim duorum quantorum majus est, habebit ad tertium aliquod quantum majorem *rationem*, quam alterum minus.

PROPOSITIO VI.

§. 108. **I**N *progressione continua Geometrica* si positiones sint *impares* v. g. 5. multiplicando numeros extremos æque a medio distantes, eadem summa prodibit.

2. 4. 8. 16. 32

Harum quinque positionum multiplica duo extrema nempe 32×2 , quorum utrumque a medio 8 æque distat, prodibunt

dibus 64; rursus multiplica 4 per 16, quæ pariter a medio 8 æque distant, & iterum factum erit 64.

Idem etiam obtinetur, dum positiones sunt pares v. g. 2. 4. 8. 16. Idem quippe factum nempe 32 prodibit, sive 16×2 sive 8×4 .

Nam secundus terminus 4 habetur, dum primus 2 in exponentem ducitur, seu dum 2 altero tanto augetur. Quartus terminus 16 rursus habetur, dum tertius terminus 8 in exponentem ducitur, seu dum pariter 8 duplicantur (§. 107.) ergo si primus terminus in quartum ducitur, numerus prodibit ex primo, & tertio termino productus cum exponente rationis; & rursus, si secundus terminus cum tertio multiplicetur, denuo prodibit numerus ex primo, & tertio termino productus cum exponente rationis, eruntque numeri æquales. Quod erat demonstrandum.

§. 109. **E**X mox allatis communis proportionum regula seu trium mirum quantum illustratur. In his quippe terminis 2. 4 : : 8. 16. video primum esse semissem secundi, & tertium esse semissem quarti; Quodsi multiplicem primum per quartum, productus erit 32 duplum nempe, respectu producti, quod habetur per multiplicationem primi, cum tertio, quia quartus duplus est tertii. Rursus si multiplicem primum per tertium, prodibit 16, nempe dimidium illius producti 32, quod fieret, si secundus per tertium multiplicaretur: quia nempe productum ex multiplicatione 4 per 8 duplum est producti ex multiplicatione 2 per 8: & quia productum ex multiplicatione duorum mediorum 4, & 8 æquatur producto duorum extremorum 2, & 16; sicut enim 4 duplum est 2, ita etiam 16 duplum est 8: & sicut 2 ad 4, ita 8 ad 16. Quæ omnia per numeros sic exprimuntur:

$$2. 4 : : 8. 16.$$

$$\& 2 \times 16. 2 \times 8 : : 16. 8. \& 8 \times 4. 8 \times 2 : : 4. 2$$

$$\text{Igitur } 2 \times 16. 2 \times 8 : : 8 \times 4. 8 \times 2$$

$$\text{Atque adeo } 2 \times 16 = 4 \times 8.$$

K 3

PRO-

PROPOSITIO VII.

§. II0. **C**Um in progressionē geometricā positiones sunt impares, mediā positio reperitur, si extrema aequaliter a medio distantia multiplicentur, & ex factō radix quadrata extrahatur. v. g.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192 &c ;
 five 192×3 , five 96×6 , five 48×12 semper factum prodibit 576. Ex quo numero si radicem quadratam extraxeris, erit quotus 24, qui numerus totius illius progressionis est medium. De extractione radicis quadrata infra (§. 147.) agetur.

PROPOSITIO VIII.

§. III. **I**N progressionē geometricā continua positiones a se aequaliter distantes habent se adinvicem aequaliter.

Sint positiones : 5. 10. 20. 40. 80. 160. sicut se habet primus terminus 5, ad secundum 10 : ita secundus 10 ad tertium 20 ; ita 20 ad 40 &c. nempe sicut $\frac{1}{2}$ ad totum. Rursus sicut se habet terminus primus 5 ad tertium 20, ita secundus 10 ad quartum 40 ; ita 20 ad 80 ; ita 40 ad 160 &c. nempe sicut $\frac{1}{4}$ ad totum. Iterum sicut se habet primus terminus 5 ad quartum 40, ita se habet secundus 10 ad quintum 80, ita 20 ad 160 &c. nempe tanquam $\frac{1}{8}$ ad totum. Denique sicut se habet primus terminus 5 ad quintum 80, ita se habet secundus 10 ad 160 &c. nempe sicut $\frac{1}{8}$ ad totum.

Nam exponentes earundem rationum sunt æquales (§. 107.) Igitur si a primo termino ad tertium toties multiplicatur eadem ratio exponens, quoties a secundo termino ad quartum &c. erit ratio exponens semper eadem (§. 11.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

§. II2. **R**eperire numerum geometricē proportionalem medium inter 16,
 & 144. Mul-

Multiplicentur invicem 144 & 16, *factum* erit 2304. Ex hoc numero extrahatur *radix quadrata*, (§. 147) quæ erit 48. Itaque sic se habet 16 ad 48, sicut 48 ad 144. seu : 16. 48 = $\frac{1}{3}$: : 48. 144 = $\frac{1}{3}$ (§. 107).

PROPOSITIO X.

§. 113. **I**nvenire numerum *tertium* continuo geometricè proportionalem duobus prioribus 7 & 35.

Multiplicetur *secundus* terminus 35 per semetipsum, eritque *factum* 1225. Hoc dividatur per *primum* terminum nempe 7. & erit *quotus* 175. Ita ut eadem ratione se habeat 7 ad 35; sicut 35 ad 175. Utrumque nimirum ut $\frac{1}{7}$ ad *totum*.

Nota. Geometricæ proportionès aliquando se habent in ratione *inversa*: aliquando in ratione *alterna*, aut *reciproca*. &c.

A. B : : C. D. aut : 2. 4 : : 3. 6.

In ratione *inversa*: B. A : : D. C. aut : 4. 2 : : 6. 3.

In ratione *alterna*: A. C : : B. D. aut : 2. 3 : : 4. 6.

quianempe $AD = BC$ §. 108.

Item componendo: $A + B. B : C + D. D.$ quianempe $AD + BD = BC + BD.$ cum $BC = AD.$

Aut dividendo: $A - B. B : : C - D. D.$

In ratione *reciproca*: A. C : : D. B. aut. 2. 3. : : 6. 4.

§. 114. **S**unt & aliæ numerorum *proportionès*, seu potius *combinationès*, quæ festivum quid, ac jucundum Tyronibus exhibent, veluti est *Quadratum vulgare*; cum nempe numeri quidam recurrentes sic disponuntur in aliquo *quadrato*, ut ex omni linea, seu *horizontali*, seu *verticali*, seu *diagonali* semper eadem summa eliciatur. v. g. velis hos numeros: 2, 6, 4, 1, 3. indiscriminatim positos quadrato inscribere: ponatur *medius* horum quinque *characterum* nempe 4 ad *infimam* lineam dextrorsum; tum *sinistrorsum* pergendo, scri-

scribe in subsequentibus areolis characteres, ut se sinistrorsum sequuntur v. g. post 4 sint 6, post 6 sint 2, post 2 sint 3, post 3 sit 1. Jam in secunda linea ascendendo, pone pro primo caractere dextimo illum, qui *medius* fuerat in prima

| | | | | | |
|----|----|---|---|---|----|
| 16 | 16 | | | | |
| 2 | 6 | 4 | 1 | 3 | 16 |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 6 | |
| 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | |
| 6 | 4 | 1 | 3 | 2 | |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | |

linea nempe 2, & ita rursus secundum ordinem characterum, imple sinistrorsum hanc secundam lineam, ut post 2 sequantur 3, 1, 4, 6. In tertia linea ascendendo, pone *medium* characterem secundæ lineæ nempe 1. pro primo dextimo. Atque sic agatur cum aliis lineis, donec quadratum, & omnes areolæ impleantur; & fiet, ut quemmadmodum hi characteres 2, 6, 4, 1, 3 sibi additi efficiunt 16, ita quoque omnis linea hujus *quadrati* complectatur 16. v. g.

$$\text{Linea verticalis} \quad 4 + 3 + 6 + 1 + 2 = 16$$

$$\text{Linea horizontalis} \quad 3 + 2 + 6 + 4 + 1 = 16$$

$$\text{Linea diagonalis} \quad 2 + 1 + 6 + 3 + 4 = 16.$$

§. 115. **A**lia præterea est methodus, multoque præstantior *quadrata* ejuscemodi *arithmetica* construendi secundum 5 cellulas; in quadratum redactas; quibus cellulis, si præter numeros etiam sex diversæ literæ inscribantur, fiet, ut non modo duodecies (nempe juxta 5 supputationes verticales, 5 horizontales, & duas diagonales) idem numerus proveniat, sed decies octies, nempe secundum illarum etiam cellularum supputationes, in quibus similes literæ sunt adscriptæ. Quorum omnium *quadratorum* id debet strui fundamentum; ut quis noverit 25 primos seriei naturalis numeros in cellulas *quadrati* ita distribuere, ut secundum omnem supputationem seu verticalem, seu horizontalem, seu diagonalem semper 65 numerentur. Quoniam vero hujusmodi *quadrati*, 25 cellulas continentis, radix est 5; quadretur hæc radix 5, = 25; huic quadrato 25 adjice 1 = 26; hujusque

que dimidium ; nempe 13 erit numerus in media *quadrati* cellula collocandus , quod præfenti fchemate exhibetur.

| | | | | | |
|----|----|--------|----|----|----|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 | |
| a | b | c | b | a | |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 | 4 |
| f | d | e | d | f | |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 | 17 |
| c | e | abcdef | e | c | |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 | 10 |
| f | d | e | d | f | |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 | 23 |
| a | b | c | b | a | |
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 | 16 |

Porro 1 ponitur infra mediam cellam. 2 ponuntur dextrorsum , una cella inferius ; 3 rursus poni deberent dextrorsum in inferiori ordine ; cum autem nulla jam cella ibidem existat , ponitur ad supremam cellam verticalem ejusdem ordinis ; 4 iterum collocari deberent in cella dextrorsum descendendo , cum tamen cella ibidem nulla superfit , transferuntur ad primam sinistimam cellam ejusdem ordinis horizontalis. Ast , si forte obtingat , ut numerus quispiam , hac perpetua ratione disponendus , incurrat in cellam , alio jam numero occupatam , ponatur ille numerus sinistrorsum in cella inferioris ordinis , veluti factum est cum numero 6 , qui alioquin ponendus fuisset in cellam , unitate prius occupatam.

Hac aliorum subsequentiū numerorū dispositione adornata , five verticales , five horizontales , five diagonales numerorū ordines addideris , five etiam numeros cellularum , iisdem literis sparsim insignitarum , productum habebis perpetuum numerum 65. Porro 6 literæ ABCDEF eo

DE

L

ordi-

ordine disperguntur , ut in media areola omnes quidem collocentur , A vero præterea teneat quatuor angulos ; B vicinas areolas horizontales ; C medias laterales ; D areolas verticales , ipsi B vicinas ; E vicinas mediæ cellæ & horizontales , & verticales ; F demum vicinas verticales ipsi A , quod ex schematis inspectione patescit. Atque hæc instructio ceu fundamentum omnibus aliis quadratis deservit , quibus aut certum aliquem annorum numerum , aut etiam certum nomen literis cabalisticis expressum eruere velis. Probatio *quadrato* bene constructo accedet ; si tam verticales , quam horizontales , & diagonales ; itemque similium literarum computationes idem productum constituent , quemadmodum & in mox præcedente schemate constituunt. v. g.

$$\text{Ordo horizontalis} \quad 11 + 24 + 7 + 20 + 3 = 65.$$

$$\text{Ordo verticalis} \quad 11 + 4 + 17 + 10 + 23 = 65.$$

$$\text{Ordo diagonalis} \quad 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65.$$

$$\text{Computus lit. A} \quad 11 + 3 + 23 + 15 + 13 = 65.$$

Idem prorsus per cæteros ordines , & literas continuando produceretur.

Quod si igitur cuipiam animus sit *quadratum* hac methodo construendi , quod undequaque numerum anni labentis 1752 referat , dividatur primum numerus anni 1752 per numerum cellularum 5. & prodibit quotus 350.

Hic quotus semper medium obtinere locum debet in quadrato , quemadmodum & in præcedenti schemate

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 1752} \quad | \quad 350 \\ \underline{- 25} \\ 2 \end{array}$$

conspicitur numerus 13. Tum ab hac radice 350 progressio fit secundum seriem naturalem descendendo , nempe 349, 348, 347, 346 atque ita porro per duodecim gradus , usque ad numerum 338 , qui numerus 338 statim infra medium ponitur , sicut antea unitas infra medium quoque numerum fuit collocata. Cum his 12 descendentibus numeris implebis medietatem *quadrati* , 25 cellulas continentis.

Porro pro altera quadrati medietate , formabis ex radice 350 progressionem numerorum naturali serie ascendentium nempe 351 , 352 , 353 , 354 pariter usque ad gradum duodeci-

decimum nimirum 362. Qui numerus 362 eo prorsus loco ponendus erit nempe supra mediam areolam, quo nempe in præcedenti schemate numerus 25 erat rejectus; dispositio numerorum servatur eadem, quæ tradita est pro schemate præcedenti. Quoniam autem in divisione anni 1752 duo remanserunt, forent utique præter numeros integros singulis areolis etiam $\frac{2}{3}$ adjiciendæ; alioquin productum ex illis supputationibus, seu diagonalibus, seu verticalibus, seu horizontalibus, seu etiam literariis deficeret, & quod referre deberet 1752, referet duntaxat 1750, nimirum fractione $\frac{2}{3}$ in omnibus omiffa. Fractionum autem positio cum *quadrati* ordinem deformem reddat; igitur numerus binarius cuivis ordini & verticali, & horizontali, & diagonali adjicitur ea adhibita cautela, ut ne numerus ille 2 in uno quocunque ordine bis positus fuisse recurrat, quod in mox consequenti schemate amplius patefcet: signum quippe * areolis inspersum notabit, numerum binarium numero occurrenti fuisse adjectum. Eadem omnino praxi uteris, si qua forte in divisione numerus 3 vel 4 remanserit.

Quotus 350 + 2
Progressio descendens

- 349
- 348
- 347
- 346
- 345
- 344
- 343
- 342
- 341
- 340
- 339
- 338

| | | | | |
|---------------|---------------|--------------------|---------------|---------------|
| 348 a | 361 b | 344 c | * 359 b | 340 a |
| 341 f | 349 d | 362 e | 345 d | * 355 f |
| 354 c | 342 e | * 352 abcdef | 358 e | 346 c |
| * 349 f | 355 d | 338 e | 351 d | 359 f |
| 360 a | * 345 b | 356 c | 339 b | 352 a |

Progressio Ascendens

- 351
- 352
- 353
- 354
- 355
- 356
- 357
- 358
- 359
- 360
- 361
- 362

Ex omnibus hujus *quadrati* ordinibus, seu horizontalibus, seu verticalibus, seu diagonalibus, itemque ex supputatione cellularum, literam consimilem præferentium, nempe per 18 variationes, idem semper numerus anni labentis 1752 elicitur. v. g.

$$\text{Ordo horizontalis } 348 + 361 + 344 + 359 + 340 = 1752$$

$$\text{Ordo verticalis } 348 + 341 + 354 + 349 + 360 = 1752$$

$$\text{Ordo diagonalis } 348 + 349 + 352 + 351 + 352 = 1752$$

$$\text{Computus lit. A } 348 + 340 + 352 + 360 + 352 = 1752$$

Et sic de cæteris.

Et hæc quidem de *quadratis*, quæ fiunt ex numeris progressionis ordinem servantibus. Quod si vero progressionis ordinem in numeris interrumpi sit necessum, nempe ut in quadrati areolis certus quispiam numerus dierum, mensium, aut annorum exprimat, aut etiam ut voces numeris cabalisticis comprehensæ sensum integrum intra quadrati cellulas exhibeant; tum majori quopiam studio arithmetico, atque attentione est opus. Velis v. g. Schema quadrati mox antecedentis ita immutare, ut præter numerum 1752 undequaque proveniente, etiam in designatis hujus quadrati cellulis exprimat, annus, mensis, & dies, quo nata est MARIA THERESIA Augusta, annus nempe 1717, mensis quintus, id est Majus, & dies ejusdem mensis 13. Item etiam annus, mensis, & dies, quo natus est Serenissimus Archidux JOSEPHUS, nimirum annus 1741, mensis tertius, id est Martius, dies ejusdem mensis pariter tertius decimus; primo numerum 348 in superiore sinistima cellula quadrati præcedentis recurrentem commuta in 17, ut conspicias in sequenti quadrato arithmetico-magico, & remanebunt 331, quem eundem numerum 331 quartæ cellulæ, a sinistris dextram versus pergendo in supremo horizontali ordine, addes, ut in eadem quarta cellula, loco 359 prioris schematis, sint 690; Igitur utut numeri, in primo horizontali ordine sint interrupti, nihilominus ex additione omnium cellularum prodibit nu-

numerus 1752; quod enim uni areolæ est demptum, hoc alteri accessit; ast in utriusque immutatæ areolæ linea verticali deprehendetur error; itaque ut & hic tollatur e medio, descende in primo ordine sinistimo verticali usque ad quartam areolam, & quem numerum 331 supremæ ejusdem ordinis cellulæ dempsisti, adjice numero 349 ut sit 680. Et facta hac immutatione proveniet etiam ex primo sinistimo verticali ordine anni labentis numerus, nempe 1752: procede ad quartam cellulam; in qua loco 359 ponebantur 690, atque ex hac descende ad quartam in verticali ordine, in qua cellula numerum 351 deprehendes, huic numero deme iterum 331, quæ superiori numero hujus verticalis ordinis antehac adjecisti, & remanebunt 20, quo etiam fiet, ut hic verticalis ordo, sublato errore, denuo annum 1752 complectatur. Atque sic unus certus numerus inductus est, nempe 17, interrupto quidem progressionis ordine, manente tamen priori producto, nempe 1752.

Perge jam ad primam superiorem dextimam areolam, eique loco 340, inscribe 41; ut nimirum annus natalis Serenissimi Archiducis repræsentetur 1741. Remanebunt 299, quem numerum residuum adde quartæ cellæ primi ordinis horizontalis a dextra sinistram versus pergendo, ut nempe loco 361, fiant 660. Totus superior ordo horizontalis exhibebit hos numeros $17 + 660 + 344 + 690 + 41$, qui numeri omnes in unum collecti non modo annum 1752 significant, verum etiam in prima, & ultima cella ostendunt annum nativitatis 1741. Porro, quia primæ superiori dextimæ areolæ subtractus est numerus 299, & quia idem numerus additus fuit cellæ quartæ ejusdem ordinis horizontalis, ideo ex utraque hac cella verticaliter ad quartam descende, & quartæ cellæ verticali primi dextimi ordinis, quæ 359 refert, adde 299, ut sint 658: quartæ autem cellæ verticali quarti ordinis (a dextris pergendo sinistram versus) cui inscriptus est numerus 355, subtrahe 299, ut sint 56. Erunt itaque omnes numeri ordinis horizontalis

quarti 349 + 56 + 338 + 351 + 658, qui additi infimul constituunt productum 1752.

Hanc eandem methodum tenebis in variandis quadrati præcedentis numeris, ut nempe in inferioribus areolis annus, mensis, & dies Natalis MARIE THERESIE Augustæ exhibeatur; operam tamen dabis, utne diagonales numeros nimum permutes. Quæ omnia subjecto schemate exhibentur.

Quadratum Arithmetico - Cabalistico - Magicum.

| | | | | |
|----------|----------|--|----------|----------|
| 17 a | 317 | 964 b | 413 | 41 a |
| 32 | 729 c | Natalis M. Theresiæ August. & Josephi F. | 649 c | 342 |
| 17 b | 698 d | 356 abcd | 664 d | 17 b |
| 985 | 5 c | 34 d | 13 c | 715 |
| 701 a | 3 | 398 b. | 13 | 637 a |

In primo ordine horizontali majoribus characteribus exprimitur annus 1741; ultimo vero ordine horizontali confignatur mensis tertius nempe *Martius*, & dies ejusdem 13. quo natus est, illud tot gentium ac regnorum Delicium, & stirpis Augustæ Decus, serenissimus Archidux JOSEPHUS. In tertio horizontali ordine majoribus characteribus notatur annus 1717. in quarto autem ordine mensis 5 id est majus, & dies ejusdem 13 Natalis MARIE THERESIE AUGUSTÆ. Qui quidem omnes numeri sic adpersi sunt, ut nihilominus ex omni ordinarum seu verticalium, seu horizontalium seu diagonalium supputatione, itemque ex areolis, similes literas exhibentibus, universim decies sexies numerus anni labentis 1752 eliciatur. v. g.

$$\begin{array}{l} \text{Ordo horizontalis} \quad 17 + 317 + 964 + 413 + 41 = 1752 \\ \text{Ordo verticalis} \quad 17 + 32 + 17 + 985 + 701 = 1752 \\ \text{Ordo diagonalis} \quad 17 + 729 + 356 + 13 + 637 = 1752 \\ \text{Computus lit. D} \quad 698 + 664 + 34 + \dots + 356 = 1752 \text{ \&c.} \end{array}$$

Prolixiores has de *quadrati* constructione præceptiones afferre placuit, non quidem eum in finem, quasi vero merces ejuscemodi ex Mathematicorum officinis jure suo repeti deberent; sed quod adolescentum horas subsecivas industria curiositate traducere soleant, & otia non raro officii atque humanitati impendant.

§. 116. **H**Uc quoque referri debet ars illa combinandi, ut ex certo quodam numero, per alium certum numerum mensurato, certæ tantummodo res capiantur: sic fertur nauta quispiam, cum 30 homines, 15 nempe *Christianos*, & quindecim *Judeos* veheret, cumque ingruente necessitate mediætas hominum in mare esset ejicienda; ita consentientes, & *Christianos*, & *Judeos* in circulum disposuisse, ut *nonus* ordine quisque fortuitus in mare præcipitaretur, donec mediætas esset avulsa; fertur, inquam, nauta ille *Christianus* cæteros quindecim *Christianos* sic disposuisse inter *Judeos* juxta hoc carmen:

men: *Populeam virgam mater regina tenebat*, ut ordine *nonus* quisque semper esset *judæus*, superstitibus Christianis. Carminis hujus vocales significant

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| a, | e, | i, | o, | u. |

Itaque primum pro exigentia literæ o quatuor *Christianos* disposuit, tum pro exigentia vocalis u quinque *judæos*. Rursus duos *Christianos* &c. prohibatque series collocatorum

cccc iiiii cc i ccc i c ii cc iii c ii cc i.

in qua serie nonus quisque exemptus, & ejectus erat judæus. Sed Institutionum nostrarum brevitatis non patitur hisce nos diutius immorari.

Aliæ denique sunt species proportionis, quæ *Arithmeticam practicam* potissimum spectant, nempe: regula *Societatis*, *Alligationis*, & *Falsi*, quas compendio absolvemus.

CAPUT XL

De Regulis *Societatis*, *Alligationis*, & *Falsi*.

§. 117. **R**egula *Societatis* est, quæ damnum vel lucrum æquaratione inter eos partitur, qui symbolam ad Societatem contulerunt. Fit eo modo, quo regula *Trium*.

PROPOSITIO I.

§. 118. **T**res mercatores *Societatem* pro tractandis commerciis iniverunt: *primus* A contulit 1400 fl. *secundus* B 950 fl. *Tertius* C 720 fl. lucrati sunt autem 1000 fl. Quæritur, quantum cuius pro ratione collati peculii ex lucro obvenire debeat?

Omnium *trium* mercatorum symbolæ addantur (§. 24.) prodibitque factum 3070. Jam per *regulam trium* dic: 3070 — 1000 — 1400 (§. 79.) & operatione facta habebitur lucrum *primi-*

primi A nempe $456 \frac{80}{1070}$ fl. Repete operationem secundo: $3070 - 1000 - 720$, & prodibit lucrum *secundi* B $234 \frac{620}{1070}$ fl. Denique tertio operationem repetendo, reperies lucrum *terti* C $309 \frac{170}{1070}$ fl. Jam vero, additis fractionum numeratoribus, habebitur totus florenus. Adde etiam florenos, & reperies 999, adjectoque illo ex fractionibus prodeunte erunt 1000 fl.

| | | | | |
|-------------|---|------|------|------------------------|
| 1400 A | } | 1400 | — | $456 \frac{80}{1070}$ |
| 720 B | | 720 | — | $234 \frac{620}{1070}$ |
| 950 C | | 950 | — | $309 \frac{170}{1070}$ |
| <u>3070</u> | | --- | 1000 | |

§. 119. **S**I accedant circumstantiæ certi temporis v. g. A contribuit 1400 fl. pro 2 annis. B 720 pro 3 annis. &c. Multiplica has temporis circumstantias cum ipsa pecunia, & operare prout in regula Proportionis (§. 79.)

§. 120. **R**egula *Alligationis* est, quæ diversi generis, & precii res alligat, atque commiscet, & precium, mixtis partibus correspondens, indicat. Seu: docet, quantum e singulis diversi precii rebus misceri debeat, ut certo quopiam precio divendi possint. v. g. Vellet caupo, habens duas vini sortes, quarum unius mensura valet 24, alterius vero 16 cruciferos, vendere cuidam emptori vinum, petenti unam urnam, id est 42 mensuras, sed tali precio, ut una mensura 18 cruciferis væneat. Jam quæritur: quantum ex singulis duplicis vini sortibus caupo in unam urnam commiscere debeat: ut sine suo damno, & etiam citra emptoris deceptionem in negotio versetur? Fit itaque operatio juxta sequentem *hypothesein*.

§. 121. **N**umeri duo commiscendi ordine, alter infra alterum adscribantur; in sinistro autem latere notetur

M

tur

tur precium seu numerus determinatus eo loco, ubi inter majorem, & minorem mediat. Ad dextram pone *differentias* inter numeros oppositos, & numerum determinatum sinistimum, sic, ut *excessus* majoris numeri ad dextram minoris numeri ponatur; *defectus* vero minoris ad dextram majoris. Adantur hæ *differentia*, ut unam summam efficiant, fiatque *regula trium*. Sit Problema resolvendum mox (§. 120.) insinuatum.

Precium vini ordine alterum infra alterum adscribatur nempe 24, & 16, sinistrorsum notetur *precium medians* nempe 18. *Defectus* numeri minoris 16 respectu majoris 18 nempe 2 alligetur ad dextram numeri majoris 24; & rursus *excessus* majoris numeri 24 respectu 18 nempe 6 ponatur dextrorsum ad numerum minorem 16. Hæ duæ *differentia* $2 + 6 = 8$. Jam vero, quia ex duplici hoc vino una urna, id est 42 mensuræ commisceri debent, fiat *regula trium* dicendo: 8 dant 42 mensuras, quotnam mensuras dabunt 2? & prodibit numerus mensurarum, quæ ex forte 24 cruciferorum admisceri debent, nempe $10\frac{1}{2}$. Altera rursus fiat positio, dicendo: 8 dant 42, quotnam mensuras dabunt 6? habebiturque numerus mensurarum ex forte vini 16 cruciferorum, quæ commisceri debeant, nempe $31\frac{1}{2}$. Denique $10\frac{1}{2} + 31\frac{1}{2} = 42$.

$$\begin{array}{r|l} 18 & \begin{array}{l} 24 \\ 16 \end{array} \\ \hline & 8 \end{array}$$

| | | | | | | Mensuræ |
|---|------|----|------|---|------|-----------------------------------|
| 8 | ---- | 42 | ---- | 2 | ---- | $10\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{2}$ |
| 8 | ---- | 42 | ---- | 6 | ---- | $31\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | 42 |

§. 122. *PRoba* hac ratione fit: precium unius urnæ seu 42 mensurarum, quarum singulæ constant 18 cruciferos,

feros, inquiratur, in est: $42 \times 18 = 756$ crucif. seu 12 fl. 36 cr. Porro $10\frac{1}{2}$ mensuræ vini, quarum singulæ valeant 24 cr., constabunt 252 cr. seu 4 fl. 12 cr. Mensuræ vero $31\frac{1}{2}$, per 16 cr. constituunt summam 504 cr. seu 8. fl. 24 cr. Quæ duæ summæ 4 fl. 12 cr. + 8 fl. 24 cr. = 12 fl. 36 cr. Ita ut mensura, ex his duplicis vini fortibus commixta, pariter 18 cr. valeat. *Quod erat faciendum.*

§. 123. **Q**uod si plures quam duo numeri alligandi seu commiscendi forent, tunc numerus ille *medius* ponitur eo loco, ubi inter majores, & minores mediat. Si plures sint numeri *excedentes*, & unus tantum *deficiens*, tum omnium majorum numerorum *differentia* adjunguntur numero *deficienti* v. g.

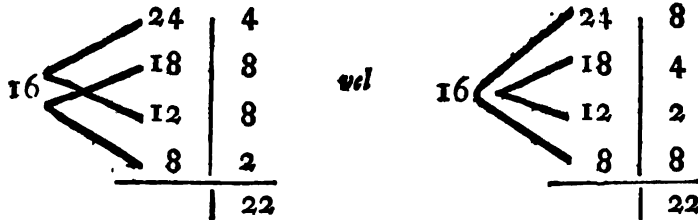
Sint tres vini fortes commiscendæ, quarum unius mensura valeat 24 cr. alterius 20 cr. tertii 16 cr. debeat ex his una urna vini commisceri, cujus mensura sit 18 cr. Itaque *defectus* numeri 16 respectu numeri 18 nempe

| | | |
|----|----|------|
| 18 | 24 | 2 |
| | 20 | 2 |
| | 16 | 6.2. |
| | | 12 |

2 apponitur ad utrumque numerum majorem 24, & 20. Et vicissim: excessus uterque numerorum majorum 24, & 20 respectu 18, nimirum 6, & 2 apponitur ad numerum minorem, fitque *regula trium* 12 --- 42 mensuras --- 8. (§. 79.) factum dabit numerum mensurarum ex sorte vini per 16. cr. nempe 28. Sicque de cæteris. Sin vero plures sint *deficientes*, quam *excedentes* numeri, tunc *differentia* omnis minorum numerorum additur numero majori, *differentia* autem majoris numeri adscribitur singulis minoribus v. g. sit urna vini commiscenda, cujus una mensura valeat 18 cr. ex triplici sorte vini: cujus unius mensura 24 cr., alterius 16, tertii 12 æstimatur. *Differentia* minorum numerorum nempe 6, & 2 id est 8 adscribantur majori numero 24; *excessus* vero majoris numeri 24 respectu 18, id est 6. apponitur utrique minori. Additæ omnes *differentiæ* $8 + 6 + 6 = 20$. Fiat itaque operatio (§. 121.)

| | | |
|----|----|------|
| 18 | 24 | 6.2. |
| | 16 | 6 |
| | 12 | 6 |
| | | 20. |

§. 124. **D**Enique *alligations* in pluribus numeris diversimode designari possunt. v.g. Velles quatuor fortes vini commiscere, quarum *prima* fortis mensura 24 cr. *secunda* 18. *tertia* 12, *quarta* defnum 8 cr. constat, ut ex his vinum commisceatur, quod valeat 16 cr. Duplici modo hæc alligare poteris.



§. 125. **V**isum est, & hoc loco commemorare regulam illam, dictam *caci* seu *virginum*, eo quod in ea cæcis veluti manuactionibus operari sit necessum. Docet hæc regula certas species discriminare v.g. emptæ sunt carnes quadruplicis fortis, aprina libra per 10 cr. vitulina 8 cr. bubula 6. cr. vervecina 4 cr., atque pro 62 libris expensi sunt 6 fl. 48 cr. Quæritur: quotnam libræ ex singulis sortibus emptæ sint?

Apponantur sinistrorsum precia, *minimum* vero pretium, inferius positum, nempe 4 a singulis subtrahatur, id quod remanet, dextrorsum adscribatur.

Jam pretium 6 fl. 48 cr. reducantur in meros cruciferos, nempe 408 cr. Numerus vero librarum 62 multiplicetur per minimum inferius precium 4, & erit factum 248. Hoc sub-

| | | | |
|----|---|-----|----|
| | | 408 | |
| | | 248 | |
| 10 | 6 | 160 | 12 |
| 8 | 4 | 88 | 14 |
| 6 | 2 | 32 | 16 |
| 4 | 0 | | 42 |

ducatur a precio 408, residuum 160. Porro hæc 160 per tres illos differentiales numeros, qui remanserunt 6, 4, 2 tanquam per divisores successive dividantur, donec, cæco modo divisionem per 3 hos divisores continuando, videas in fine omnia disparere, & nihil remanere. Divide itaque primo

me-

merum 160 per 6 cæco modo duodecies, & remanebunt 88; hæc divide per 4 decies quater, remanebuntque 32; hæc 32 tandem divide per 2, & erit *quotus* 16 nullo remanente. Igitur 12 libræ aprinæ, 14 vitulinæ, & 16 bubulæ carnis additæ efficiunt 42. At vero emptæ sunt libræ carniū univèrsim 62 libræ; Itaque $62 - 42 = 20$. ut 20 libras vervecinæ carnis necessum sit aliis adjicere.

§. 126. **P**ROBA fit: $12 \times 10 = 120$. $14 \times 8 = 112$. $16 \times 6 = 96$. $20 \times 4 = 80$. Numeri autem $120 + 112 + 96 + 80$ cruciferorum = 408 cr. seu 6 fl. 48 cr.

Verumtamen incerta est hujus regulæ operatio, vehementerque ab arithmetica infallibilitate abiudit; tum quod divisionem cæco prorsus modo instituere necessum sit: tum quod numerus variarum, & variarum specierum possit aliter, & aliter variari. Dividatur numerus 160 per 6 duodecies, remanentia 88 per 4 rursus duodecies, remanentia tandem 40 per 2 vigesies; $12 + 12 + 20 = 44$ libris carniū. Sed debent esse libræ 62; igitur $62 - 44 = 18$. tot enim præterea emptæ fuisse censeri debent libræ carnis vervecinæ. Quæ omnia, si suis quæque pretiis æstimentur, prodibunt pariter 408 cr. seu 6 fl. 48 cr. ita ut nihil certi rescire liceat de numero librarum determinatæ cujusque fortis. Ideoque regulam hanc insufficientem vel commemorasse sufficiat. Ad regulam *falsi* est accedendum.

§. 127. **R**EGULA *falsi* est, quæ ex pluribus numeris falsis docet verum elicere. Est duplex: regula *falsi simplicis positionis*, & regula *falsi duplicis positionis*. Regula *falsi simplicis positionis* ex una sola positione alterum verum numerum deducit. Regula *falsi duplicis positionis*, duas adhibet positiones, ut ex numeris falsis assumptis *verus* tandem eruatur.

§. 128. **O**MNES quidem Propositiones, quæ ad regulam *falsi* referuntur, possunt resolvi per regulam *duplicis*

vis positionis; at non omnes propositiones resolventur per regulam *simplicis positionis*; Unde regula *simplicis positionis* brevioris quidem operationis est; regula tamen *duplicis positionis* ad plures sese extendit propositiones resolvendas, estque plane necessarium eam nonnunquam adhiberi v. g. cum numerus quidam *determinatus* numerum alterum *ignotum*, & inquirendum ingreditur, ut mox dicetur.

§. 129. **R**EGULA *simplicis positionis* assumit sibi numerum *arbitrarium* loco illius, qui inquiretur. Cum hoc numero *arbitrario* proceditur juxta Propositionis seriem: Quod si numerum talem *arbitrarium* fortuito assumpseris, qui verus simul sit, ulteriori regulæ usu opus non est. Quodsi vero numerus ille *arbitrarius* vel major sit, vel minor, quam oporteat, tum regulam *trium* adhibebis (§. 79.) primo loco ponendo *factum* prodiens ex numero *arbitrario* assumpto: secundo loco ipsum numerum *arbitrarium*: tertio demum loco *numerus datus* in quaestione, & *factum* ex regula *trium* proveniens, numerum quaesitum exhibebit. Sit.

PROPOSITIO II.

§. 130. **I**nterrogatur Cajus: quotnam florenos pro annuo victu persolvat? interroganti respondet: si medietati hujus pecuniæ adderem $\frac{1}{7}$, & $\frac{1}{2}$. tum darem 78 florenos. Quæritur igitur: quotnam florenos revera annue persolverit.

Finge numerum *arbitrarium* v. g. 12. cujus medietas = 6; tertia vero pars = 4, & quarta pars = 3. Jam $6 + 4 + 3 = 13$. Igitur 13 numerus *falsus* est; ut vero in cognitionem veri deveniatur, fac regulam *proportionis* dicendo: 13 proveniunt ex 12, ex quo numero prodibunt 78 floreni? *Factum* prodibit nempe *verus numerus* 72, tot enim pro annuo victu Cajus persolvit. Nam $13. 12 \therefore 78. 72$. *Quod erat demonstrandum.*

§. 131.

§. 131. **P**ROBA fit, dum *factum*, ex instituta regula *trium* proveniens, juxta indicatam seriem dividitur; veluti in data mox propositione: ex 72 accipiatur medium, id est 36. tertia illius pars est 24. quarta pars est 18. Quæ omnia si insimul addideris, rursus prodibit *falsus* numerus primum indicatus, nempe: 78.

PROPOSITIO III.

§. 132. **Q**UATUOR sunt scribæ, habentes diversam in describendo velocitatem. *Primus* die uno describit 7 phyliras, *secundus* 6, *tertius* 4, *quartus* 3. Sint igitur describendæ 360 phyliræ, quæritur: quot diebus hi scribæ collocata opera dictas phyliras sint descripturi?

Assume numerum dierum *arbitrarium* v. g. 5. Igitur *primus* scriba 5 dierum spacio describet phyliras 35. *secundus* 30, *tertius* 20, *quartus* 15. Jam $35 + 30 + 20 + 15 = 100$; debebant autem esse phyliræ 360; igitur numerus dierum 5 *falsus* est. Itaque ut *verus* eruatur, fiat regula *proportionis* (§. 79.) 100 phyliræ describuntur intra 5 dies, intra quot dies describentur 360? prod. etum habebis 18 numerum *verum*; tot quippe dies quatuor illi scribæ infument.

PROBA fit modo mox insinuato (§. 131.)

§. 133. **R**EGULA *falsi duplicis positionis* hoc modo peragitur: primo numerus *arbitrarius* assumitur, cum hoc agitur juxta quæstionis seriem; si *factum* prodeat + vel — quam oporteret, tum assumitur alter numerus *arbitrarius*, & cum eodem pariter agitur juxta seriem quæstionis. Si & ex isto secundo *arbitrario* numero *falsus* proveniat, vel per excessum, vel per defectum, tum pone sinisterorsum utrumque numerum *arbitrarium*, alterum infra alterum; dextrorsum vero nota pariter errorem utriusque, vel per + vel per —, ac multiplicentur decussatim errores cum numeris *arbitrariis*. Si errores fuerint similes, id est uterque vel per *excessum*, vel per *defectum*, tum

disse-

differentia productorum ex multiplicatione, dividatur per *differentiam* errorum: Quod si vero errores fuerint dissimiles, id est: alter +, alter —, tunc *ambo producta* ex multiplicatione *errorum*, & numerorum *arbitrariorum* addita dividantur per summam additam utriusque erroris, & *quotus* exhibebit numerum quæsitum.

PROPOSITIO IV.

§. 134. **T**Ribus pauperibus legantur per testamentum 47 aurei; hac cum testatoris expressione, ut secundus pauper B accipiat 5 aureis +, quam primus pauper A; tertius vero C tantundem, quantum secundus B, & insuper 10 aureos. Quæritur: quantum singuli horum pauperum A, B, C obtinuerint?

Accipe numerum *arbitrarium* pro paupere A fuisse 4 aureos; igitur B accipit 9. C vero 19. Hi numeri $4 + 9 + 19 = 32$. Atqui debebant esse 47. Itaque error est — 15. Iterum assume alterum numerum *arbitrarium*, & tribue pauperi A 7 aureos, obvenient pauperi B 12, & pauperi C 22. Numeri aureorum $7 + 12 + 22 = 41$. Ast debebant esse 47. Ergo alter error — 6. Pone itaque utrumque numerum *arbitrarium* sinistrorsum 4, & 7. dextrorsum autem utriusque *errorem* 15, & 6: tum multiplica decussatim numeros *arbitrarios* cum *erroribus*, & habebis duplex productum 24, & 105; Quia vero *errores* similes sunt: uterq; nimirum per defectum; igitur minus productum 23 subtrahere a 105, habebisque *differentiam* productorum 81. Hanc *differentiam* divide per *differentiam* 9 (quippe inter 15, & 6 est *differentia* 9) & prodibit *quotus* 9. Tot nempe aureos *primus* pauper A percepit, *secundus* B 14, *tertius* C 24, & $9 + 14 + 24 = 47$. *Quod erat faciendum.*

$$\begin{array}{r}
 4 \quad - \quad 15 \\
 7 \quad - \quad 6 \\
 \hline
 24 \quad 105 \\
 \quad \quad 24 \\
 \quad \quad \hline
 9 \quad | \quad 81 \quad | \quad 9
 \end{array}$$

PRO-

PROPOSITIO V.

§. 135. Interrogatus quidam : quotnam libros habeat domi suæ ? sciscitanti reponit : si adhuc medietatem , & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ numeri librorum , atque præterea 10 haberem , haberem libros 60. Quotnam libros revera habeat ?

Adscribe primum numerum *arbitrarium* 12, huic adde medietatem 6, & unam tertiam, id est 4, cum una quarta, id est 3. Ac tandem adjice 10, prodibitque ex hac additione numerus 35. At debebant prodire 60. Igitur error per defectum 25. Rursum assume alterum numerum *arbitrarium* v. g. 36, adde huic $\frac{1}{2}$ nempe 18, item $\frac{1}{3}$, id est 12, ac tandem $\frac{1}{4}$, id est 9; adjunctis 10 habebitur numerus 85. Debebant autem esse 60; igitur error per excessum 25. Multiplica decussatim numeros *arbitrarios* cum *erroribus*, & prodibunt numeri 300, & 900. Quoniam vero errores sunt dissimiles : alter nimirum per defectum, alter per excessum; ideo *productum* ex utriusque multiplicatione nempe 300, & 900 adduntur (§. 133), eruntque 1200. Hunc numerum 1200 divide per summam additam utriusque erroris, nempe per 50, & proveniet *quotus* 24, qui indicabit *verum* numerum librorum; nam medietas, id est $12 + \frac{1}{3}$, id est $8 + \frac{1}{4}$ id est $6 + 10 = 60$. Quod erat faciendum.

$$\begin{array}{r}
 12 \quad - \quad 25 \quad . . . \quad 25 \\
 \times \\
 36 \quad + \quad 25 \quad . . . \quad 25 \\
 \hline
 300 \quad 900 \quad 50 \\
 \quad \quad 300 \\
 50 \quad | \quad 1200 \quad | \quad 24 \text{ Numerus librorum.}
 \end{array}$$

§. 136. *Demonstratio* & hujus, & mox antecedentis propositionis fundatur in regula proportionis (§. 79.) & quidem quoad priorem propositionem : sicut se habet utriusque per defectum erroris *differentia* 9, ad assumptorum falsorum numerorum 4 & 7 *differentiam* 3. Ita se habebit *defectus* erroris 15. ad *defectum* quæsitum pro supplendo primo numero falso 4. Operatione facta prodibit numerus 5. Igitur $5 + 4$

constituunt verum aureorum numerum 9. Item : sicut se habet *differentia* 9 ad falsorum numerorum *differentiam* 3; ita defectus 6 ad defectum quæsitum pro numero falso 7 supplendo. Factum erit 2 : rursus 7, & 2 constituunt 9. seu : 9. 3 :: 15. 4. = 5. 4 + 5 = 9. Item 9. 3 :: 6. 7. = 2. 7 + 2 = 9 *verus* igitur aureorum numerus est 9.

Pro ultima vero propositione : sicut se habet *differentia* per defectum 25. cum addita *differentia* per excessum pariter 25. = 50 ad falsos numeros 12 + 36 = 48, ita se habet tam defectus 25 ad defectum quæsitum pro 14, quam excessus 25 ad excessum numeri 36. Factum ex utroque proveniet 24. Q. E. D.

SCHOLI ON

§. 137. **U**trumque mox positum problema nequit resolvi per regulam *falsi simplicis positionis*, sed debet necessario regula *falsi duplicis positionis* adhiberi; quia nempe numerus adjectus 10 afficit, seu ingreditur rationem partium ignotarum, & quærendarum, nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, id est : numerus adjectus 10 summam ex partibus illis, seu fractionibus conflata majorem reddit; At vero, quando aliquis numerus adjectus, qui non tangit partes aliquotas, tunc potest fieri problema per simplicem positionem v. g. quispiam habuit bursam pecuniæ, medietatem hujus pecuniæ elargitus est pauperibus, $\frac{1}{4}$ impendit in res sacras, & $\frac{1}{3}$ in suas animi remissiones; remanserunt eidem 5 floreni. Quæritur : quotnam floreni in bursa fuerint? Quinque, qui remanserunt, floreni, non afficiunt partes aliquotas, sed tantum exprimunt illos florenos, qui ablatis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$ remanserunt. Igitur hoc problema fieri potest per *simplicem positionem falsi*, assumendo primum arbitrarium numerum 20. Hujus medietas = 10, $\frac{1}{4}$ = 5, $\frac{1}{3}$ = 4. Additi hi numeri 10 + 5 + 4 = 19, adeoque ex hoc arbitrario numero remaneret duntaxat 1; ast remanere deberent 5; ideo verus numerus inquirendus est per regulam *Trium* dicendo : 1 remanet ex 20 post demptas partes; dum

dum remanent 5, quis erit numerus positus? factaque operatione habebitur numerus verus 100; etenim $\frac{1}{2} = 50$, $\frac{1}{4} = 25$, & $\frac{1}{7} = 20$ simul addita produciunt *factum* 95, adeoque remanent 5. *Quod erat inquirendum.*

PROPOSITIO VI.

§. 138. **T**res libri empti sunt. A, & B constabant 50 florenos, BC constabant 70 florenos; AC vero 60 florenos. Quæritur: qualem precium fuerit singulorum, & omnium simul?

Propositio resolvitur per duplicem positionem: assume primum numerum *arbitrarium* pro A 16, debet itaque B esse 34, C 36 florenorum, & A & C simul 52 florenorum; sed debebant esse 60 fl. Igitur error occurrit per *defectum* 8 florenorum. Assume secundo numerum *arbitrarium* pro A 18 fl. erit B 32, & C 38 flor. A autem, & C simul 56 florenorum. At, debebant hi ultimi duo valere florenos 60. Igitur rursus error per defectum 4. Jam itaque operando juxta §. 133. deduceres in cognitionem: librum A 20, B 30, C 40 fl. omnes vero simul 90 florenos constitisse. *Quod erat faciendum.*

COROLLARIUM.

§. 139. **S**unt consimiles fere propositiones, quæ resolvi possunt per *extractionem quadratam* § 147. v. g. sint duo fratres, quorum A 6 annis senior est fratre B; multiplicati tamen invicem anni eorum faciunt productum 1287. Quæritur: quot annorum sit utriusque singulatim ætas?

Assumatur dimidium *differentia* annorum 6, nempe 3. Hoc quadretur, & prodibunt 9. Hæc 9 addantur summæ insinuatæ 1287, habebiturque *factum* 1296. Ex hoc numero extrahatur *radix quadrata* (§. 147). nempe 36. Porro medium *differentia* annorum nempe 3 addantur huic *radici* 36. & prodibit ætas fratris senioris A nempe 39 anni. Quod si ex his 39 dempseris 6 annos, habebis ætatem junioris fratris B, nempe 33 annos.

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{3}{4} & 1287 \\
 & \underline{9} \\
 \frac{3}{2} & 1296 \quad | \text{Radix } 36 \\
 & \underline{3} \\
 & 39 \text{ A.} \\
 & \underline{6} \\
 & 33 \text{ B.}
 \end{array}$$

Nam ad hoc; ut *radix* ex toto numero quadrato extrahi queat, debet & quadratum numeri 6 admisceri; Quoniam autem excessus 6 unum tantummodo fratrem respicit; igitur medietas 6 nempe 3 quadrantur. $1287 + 9 = 1296$. *radix* 36. Porro quemadmodum numerus quadratus duplici ex ætate utriusque fratris componitur, ita & excessus 6 in duas dispesci partes debet, sic ut $\frac{1}{2} = 3$ adjiciatur *radici* 36 pro A, & $\frac{1}{2} = 3$ dematur numero 36 pro B. Erit itaque ætas senioris 39, & junioris 33. *Quod erat demonstrandum.*

Proba fit: $39 \times 33 = 1287$.

C A P U T XII.

De Extractionibus Radicum quadratarum, & cubicarum.

§ 140. *Numerus quadratus est summa, quæ orta est ex multiplicatione numeri per semetipsum v. g. $5 \times 5 = 25$ q. Item $4 \times 4 = 16$ q. Dicitur vero numerus quadratus ob analogiam, quam habet ad quadratum Geometricum (§. 162 Geom.) Numeri autem, ex quorum multiplicatione fit quadratus numerus, dicuntur *radix*, seu analogice ad quadratum geometrici.*

metricum *latus*. Est itaque extractio *radicis quadrata* e quodam numero : *invento illius numeri, qui bis, ter, quater, aut saepius in se ductus numerum majorem praeduxit.*

§. 141. **S**ignum *quadrati* est q. v. g. CB q. id est : lateris CB quadratum. Signum cubi est c. v. g. Ec. id est : cubus lateris E. *Radici quadrata* signum est R, seu $\sqrt{\quad}$ v. g. $\sqrt{A + B}$ id est : si quantitas A & B in unam summam redigantur, extrahatur *radix quadrata*. Vel $\sqrt{25}$ id est : si area quadrati sit 25, erit radix quadrata 5. *Radici cubica* signum est R c, vel $\sqrt[3]{\quad}$ c. v. g. $\sqrt[3]{216}$ id est : si cubus fuerit 216, radix illius erit 6.

§. 142. **C**ubus, seu *numerus cubicus* est, qui producitur, dum quadratus numerus per suam radicem multiplicatur v. g. 125 ex multiplicatione 25 per 5. Dicitur autem *numerus cubicus* ob analogiam ad *cubum geometricum*, qui aequaliter longus, latus, & profundus est. Ob eandem analogiam dicitur *radix cubica* etiam latus cubi. (§. 249 *Geom.*) Quod si *cubus* ipse v. g. 125 per suam radicem 5 multiplicetur, oritur numerus *quadrato-quadratus*. Si rursus *quadrato-quadratus* per eandem radicem multiplicetur, prodibit numerus *quadrato-cubicus* &c. Quoniam vero istiusmodi multiplicatio continuari potest in infinitum, igitur multiplicationes illae generali quodam nomine *Potestates, Potentia, aut dignitates* appellantur.

§. 143. **E**st itaque *potentia, seu dignitas* illud productum, quod habetur ex aliquo numero, aliquoties per se ipsum multiplicato. Sic v. g. numerus 2 est *prima potentia, seu dignitas*, aut *radix*; respectu nimirum habito ad subsequentes; quemadmodum enim unitas ad *radicem*, ita se habet radix ad *quadratum*. Productum ex $2 \times 2 = 4$ vocatur *dignitas secunda*. Productum ex $4 \times 2 = 8$ dicitur *tertia dignitas*. Productum ex $8 \times 2 = 16$ vocatur *quarta dignitas* &c. Hi gradus dignitatum vocantur proprie *exponentes dignitatum*, & exprimuntur per numeros 2, indicantes, quoties datam *dignitatem* dividere necessum

cessum sit, antequam ad unitatem perveniatur. Itaque *exponens* quadrati est adjunctus numerus 2, *exponens* cubi est 3 &c. Apud algebraicos notantur *exponentes potentiarum* hoc modo v. g.

$\sqrt{\quad}$ significat *radicem secundam* seu *quadratam*, $\sqrt[3]{\quad}$ *radicem tertiam* seu *cubicam* &c.

§. 144. *R*adix igitur alicujus potentiae est simplicissimus numerus seu quantitas, quæ certum aliquem numerum multiplicat per semetipsum. Trahit autem omnis radix nomen suum a *potentia*, cui attribuitur v. g. radix *quadrati* seu radix *secunda potentia* est *radix quadrata* seu a^2 . radix *cubi* seu *tertia potentia* est radix *cubica* seu a^3 . ita porro de *radice quarta*, *quinta* &c. Quod si aliquis *radicem cubicam* ex 125 extrahere velit, ille itaque inquirere debet: quisnam ille numerus sit, qui primum in seipsum ductus, tum vero rursus ipsum quadratum multiplicans constituat 125. ac deprehendet 5.

Radix Quadr. Cubus.

§. 145. *E*Xtractionibus *quadratis*, & *cubicis* expedit annexam tabellam præmittere. Quod si numerus quadratus non sit, v. g. 60. accipitur ex tabella *radix* proxime minor, nempe 7; hæc in se ducta producit 49, & hoc est *quadratum* maximum, contentum in numero 60. Cætera 11 ex 60 superfluunt.

| I | I | I |
|---|----|-----|
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 16 | 64 |
| 5 | 25 | 125 |
| 6 | 36 | 216 |
| 7 | 49 | 343 |
| 8 | 64 | 512 |
| 9 | 81 | 729 |

§. 146. *P*orro *radices* pro diversitate partium componentium diversa etiam nomina sortiuntur: aliquæ dicuntur *binomia*, aliæ *trinomia*, aliæ demum *polynomia*. v. g. 28 est radix *binomia*, cum ex duabus *decimis*, & 8 *unitatibus* constet, seu $20 + 8$. Sic 645 est radix *Trinomia*, quia per tres positiones

DE EXTRACTIONIBUS RADICUM QUADR. & CUBIC. 103

nes exprimitur, idemque valet, ac $600 + 40 + 5$. 1219 est radix *Quadrinomia* = $1000 + 200 + 10 + 9$. &c. Omnes autem quæque *radices*, quæ plures quam duas positiones habent, *polynomia* dicuntur.

Hypothesis extrahendi quadratam radicem est sequens.

PROPOSITIO I.

§. 147. **EX** dato numero 24029604 radicem quadratam extrahere.

I. Post binos semper numeros a dextris incipiendo punctulum ponatur.

II. Incipiendo a finistris nempe a 24, qui duo numeri ob nullum punctum interjacens ad se invicem pertinent; quærat hujus radix proxima minor nempe 4. Quadratus numerus radicis 4 est 16. Hæc 16 subtrahantur a 24. & remanebunt 8. priora 24 deleantur.

| | | | |
|----|-----|----|-------|
| 8 | 1 | | |
| 24 | 02 | | 4902. |
| 16 | .. | | |
| | 89 | | |
| | 9 | | |
| | 801 | | |
| | 9 | 80 | |
| | | 98 | 02 |
| | | | 2 |
| | | | |
| | 1 | 96 | 04 |

III. Quotus nempe 4 duplicetur, & erunt 8. Hic numerus 8 ponatur infra 0, ubi nimirum *secunda series* incipit; ac dicatur: 8 continetur in superioribus 80 novies; 9 itaque ponantur ad priorem quotum 4, & simul ad 8, ut loco 8 sint 89. $89 \times 9 = 801$. Subtractione facta a superiori numero 802, remanet 1, superiores numeri 802 deleantur ductis lineolis

IV.

IV. Rurſus duplicentur quoti 49, eruntque 98. Hi duo numeri collocentur infra superiores duos 19, & quoniam 19 per 98 dividi nequeunt, idéo 0 ponatur pro tertio *quoto* ut ſint 490, & ſimul etiam 0 apponitur numero 98, ut ſint 980. Proceditur tandem ad *ultimam ſeriem*, & duplicantur *quoti* 490, eritque *factum* 980, quod ponitur infra *ultimam ſeriem* superiorum numerorum 1960. Jam vero dicatur: 9 continentur in 19, vel 98 continentur in 196 bis; binarius itaque numerus ponatur pro quarto *quoto*, & ſimul apponatur idem numerus 2 ad 980, ut ſint 9802. $9802 \times 2 = 19604$. Quod *factum* ſi a superioribus ſubtraxeris, nihil remanebit; adeo, ut numeri quadrati 24029604 radix ſit 4902. Hac methodo aliæ proſitiones reſolvuntur.

§. 148. **E**ſt hæc *radicis quadrata* extractio, ut apparet, quædam ſpecies *diviſionis*, hoc ſolum cum diſcrimine, quod in ſimplici *diviſione*, *diviſor* ſit numerus datus; in *extractione* vero radicis inquirei debeat, & quidem per plures partes, quæ radicem conſtituunt.

Proba ſit, cum radix 4902 per ſemetipſam multiplicatur; nam $4902 \times 4902 = 24029604$ nempe numero *quadrato*.

PROPOSITIO II.

§. 149. **R**adicem *quadratam* ex hoc numero 43722. extrahere.

Radix quadrata numeri 4 eſt 2. Hæc radix $2 \times 2 = 4$. Hæc 4 ab illis 4 numeri dividendi ſubtracta nihil relinquunt. Igitur pro *quoto* ſecundo ponatur 0. Tandem *quoti* 20 pro *tertia ſerie* numeri dividendi duplicentur, eruntque 40. 4 in 37 novies

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 43722} \\
 \underline{40} \\
 37 \\
 \underline{40} \\
 370 \\
 \underline{36} \\
 20
 \end{array}$$

duci

duci possunt; igitur pro tertio *quoto* ponatur numerus 9. & simul adjungatur etiam divisor, ut sint $409. 409 \times 9 = 3681$; quæ dum a superiori numero 3722 subtrahuntur, remanebunt 41. Quod argumento est: numerum datum 43722 non posse in *quadratum* redigi; Itaque si quis *quadratam* aream 43722 pedibus constantem designari juberet, remanerent utique ex illis pedibus 41. quibus 41. pedibus demptis, numerus sit *quadratus rationalis* 43681. Neque ullus numerus quadratus esse potest, in cujus termino vel 2 vel 3 vel 7 vel 8 vel una 0 deprehendatur; cum quadrati numeri vel unitate vel 4. vel 5 vel 6 vel 9 vel etiam duabus 00 passim terminentur

§. 150. **Q**Uod si quis mallet dato numero 43722 tot pedes quadratos superaddere, ut in *quadrati* formatione, atque in extractione *radicis* seu *lateris quadrati* nihil remaneret, ille deberet inventam *radicem* 209 duplicare, ut sint 418; tum addere 1, ut sit numerus proveniens 419: addere demum hunc numerum 419 priori *rationali numero quadrato* 43681, & habebitur *factum* 44100. Hic numerus proximus *rationalis quadratus* est priori *rationali quadrato* 43681, habetque *radicem quadratam* 210.

§. 151. **S**IMILITER, si quærat numerum, proxime post 9 subsequentis in Tabula (§. 145.) *numerus quadratus*, duplicetur *numeri quadrati* 9 *radix* nempe 3, ut cum addita unitate faciat 7. Hæc 7 adde numero 9, & habebis proximum *quadratum rationalem numerum* nempe 16, cujus *radix* erit 4. Rursum si post 16 velis proximum *rationalem numerum quadratum*, duplica numeri 16 *radicem* 4, ut cum addita unitate efficiat 9. Hæc 9 adde priori *quadrato* nempe 16, & habebis proxime sequentem *numerus quadratum* 25, cujus *radix* sit 5. Et sic porro de cæteris in infinitum.

§. 152. **P**ERMULTÆ propositiones aliæ resolvi possunt sola *extractione quadratæ radicis*. Veluti hæc: Cæsareani mi-

lites cassam hostilem 66049 florenorum intercipiunt ; hanc summam ita inter se partiuntur, ut singulis quibusque tot floreni obtingant, quot numero sunt milites intercipientes. Quæritur : quotnam revera milites fuerint, & quot florenos obtinuerint singuli eorum ?

Ex summa 66049 *radix quadrata* extrahatur (§. 147.) hæc erit 257. Totigitur milites intercipientes extiterunt, totque florenorum portio erat singulorum.

Nam numerus quicumque, in se ipsum ductus, constituit *numerum quadratum*. Igitur si tot florenos quisque militum percepit, quot numero fuerunt milites, necessario debuit numerus militum, in numerum perceptorum a singulis florenorum duci, ut proveniat *numerus quadratus*: sed *radix* nihil aliud est, quam numerus ille, qui in seipsum ducitur: ergo hic per *extractionem* (§. 147.) erutus numerum exhibebit, & militum, & florenorum a singulis perceptorum. Proba quippe fit $257 \times 257 = 66049$.

PROPOSITIO III.

§. 153. *Radice cubicam* ex dato numero 14 706 125 extrahere.

I. A dextris incipiendo ternos quosque numeros puncto intercalabis, quæ puncta tot erunt membra futuræ *radicis cubica*, quot ordines numerorum beneficio intercalationis formabuntur.

II. Ex primi ordinis sinistimo numero, nempe ex 14 quære *radicem cubicam* in tabella (§. 145.) nempe 2; igitur 2 post numerum dividendum apponantur.

III.

III. Ex hac radice 2 fit *cubus* 8, qui infra 14 ponitur, atque etiam ab iisdem subtrahitur, & remanebunt 6. Hæc 6 supra apponę tanquam residuum. Tum duplica *quotum* 2, fient 4, hæc triplica fient 12.

IV. Numerum residuum 6, cum primo numero secundi ordinis nempe 7, adscribe sinistrorsum; ac mox hæc 67 divide per insinuata 12, *quotus* erit 4. Hunc dextrorsum post numerum 2 adscribe, atque cum hoc eodem numero 4 multiplicata 12, *factum* erit 48.

V. Triplica primum *quotum* 2, ut sint 6; secundum vero *quotum* nempe 4 *quadra* feu, duc in seipsam, ut sint 16; hæc 16 \times 6 prodibunt 96, quæ secundo loco infra 70 adscribe.

VII. Secundum *quotum* nempe 4 cubicabis, & factum 64 tertio loco subjunge. Has tres positiones 48, 96, 64, ubi iuxta ordinem (§. 24.) addideris, erit *factum* 5824, quæ subtrahere a superioribus 6706, & remanebunt 882.

VII. Hunc numerum 882 cum primo tertii ordinis nempe 1 adscribe dextrorsum, ut sit numerus 8821, ac operare ut prius; nempe *quotos* 24 *quadra* primum, tum *triplica*, factum erit 1728. Hoc cum numero dividantur 8821, *quotus* erit 5. Scribantur itaque 5 post duos priores *quotos* 2, & 4. & cum iisdem 5 multiplicetur *divisor* 1728; *factum* 8640 ponatur primo loco pro tertio numerorum ordine. Tum *triplicentur* 24, *factum* erit 72. Rurfus tertius *quotus* 5 *quadretur*, fient exinde 25. Hic numerus multiplicetur per 72, ac *factum* 1800 ponatur secundo loco. Denique tertius *quotus* 5 *cubicetur*, & factum 125 ponatur tertio loco, eoque res redibit, ut hi numeri invicem additi, atque a superioribus 882125 subtracti, nihil reliquum faciant, atque ut *radix cubica* sit 245. Quod ex sequenti schemate elucet.

| | | |
|---|--|--|
| $\begin{array}{r} 67 \\ 12 \end{array} \Big 4 \begin{array}{r} 6882 \\ 14706.125 \\ 8 \\ \hline 48 \\ 96 \\ 64 \\ \hline 5824 \\ 8640 \\ 1800 \\ \hline 125 \\ 882125 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 245 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ 3 \text{ tripl.} \\ \hline 1728 \text{ divis.} \\ 5 \text{ mult.} \\ \hline 8640 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 2 \text{ quad.} \quad 2 \text{ tripl.} \quad 4 \\ \hline 4 \quad 6 \quad 16 \\ 3 \text{ tripl.} \quad 6 \text{ mult.} \quad 4 \\ \hline 12 \text{ divis.} \quad 96 \quad 64 \\ 4 \text{ mult.} \quad 48 \end{array}$ |
| $\begin{array}{r} 8821 \\ 1728 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \text{ quad.} \quad 24 \text{ tripl.} \quad 3 \\ \hline 96 \quad 72 \quad 5 \text{ quad.} \quad 5 \text{ Cub.} \\ 48 \\ \hline 576 \\ 3 \text{ tripl.} \\ \hline 1728 \text{ divis.} \\ 5 \text{ mult.} \\ \hline 8640 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3 \\ \hline 25 \quad 25 \\ 72 \quad 5 \\ \hline 50 \quad 125 \\ 175 \\ \hline 1800 \end{array}$ |

§. 154. **Q**uod si vero post ultimam subtractionem quidam numerus remaneret, id indicat: numerum datum exacte *cubicum* non esse; ac proinde *radicem* inventam non esse numeri *dati*, sed maximi cubi in eo contenti.

CAPUT XIII.

De Computo Decimali.

§. 155. **C**omputus seu *calculus decimalis* docet fractiones illas supputare, quarum denominatores ab unitate progred-

grediuntur in *ratione decupla* v. g. 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. sic pericam, pedem, digitum in 10 partes dividimus, singulas has partes iterum in 10 alias partes, & sic porro. Ex qua utique divisione oriuntur partes decimæ, centesimæ, millesimæ &c. Hunc calculum pro magno Matheseos subsidio Auctor Simon Stevinus in Arithmetica induxit, & posteriorum temporum mathematici impensis studiis illustrarunt.

§. 156. *F*ractiones decimales scribuntur sine denominatoribus, horumque denominatorum vices agunt *virgula* seu *nota superna*. Sic 0 notat *integrum*, , notat partes *decimas*, // partes *centesimas*, /// partes *millesimas* &c. v. g. pericæ $3 \overset{\circ}{4} \overset{''}{5} \overset{'''}{2}$ &c. id est: $3 \frac{4}{10} \frac{5}{100} \frac{2}{1000}$, quot enim accrescunt *virgula*, tot etiam characteres censeri debent accrescere. *Punctulum* tamen passim fit inter *integra*, & *fractiones*.

§. 157. *N*umeri, seu characteres, qui unam virgulam habent, dicuntur *prima* nimirum partes; qui duas habent, *secunda*; qui tres, *tertia*; qui quatuor, *quarta* &c. Cæterum idem semper perstat numerorum valor, sive *virgula* adjiciantur, sive non. Sic 2 integra tantum valent, quantum $2 \overset{\circ}{0}$, $2 \overset{''}{00}$, $2 \overset{'''}{000}$ id est: quantum vel viginti decimæ, aut ducentæ centesimæ, aut demum bis mille millesimæ partes. Item $6 \overset{\circ}{4}$ tantum valent, quantum $6 \overset{''}{40}$, aut $6 \overset{'''}{400}$ &c.

Arithmetica *decimalis* quatuor constat regulis communibus: *additione* nimirum, *subtractione*, *multiplicatione*, & *divisione*. De quibus ordine, atque brevissime agendum est.

§. 158. *A*dditio *decimalis* est, quæ addit plures fractiones, infra se mutuo scriptas, juxta gradum atque valorem

rem *notularum* v. g. deberes tot per-ticas in-simul ad-dere $3 \frac{7}{1000} + 5 \frac{9}{1000} + 7 \frac{8}{1000}$ feu $3.007 + 5.09 + 7.8$. dabunt summam 15.897 .

$$\begin{array}{r} 3.007 \\ 5.09 \\ 7.8 \\ \hline 15.897 \end{array}$$

SCHOLION.

§. 159. **Q**uod si *fractiones decimales* ad-dendæ sint, quarum *pro-gressio decimalis* sit interrup-ta, id est: si post integra non sequantur decimæ, sed centesimæ aut millesi-mæ partes tunc ordines vacui suppleantur cyphris. v. g. addere deberes per-

$$\begin{array}{r} 4.709 \\ 8.008 \\ 2.066 \\ 0.727 \\ \hline 15.510 \end{array}$$

ticas $4.79 + 8.8 + 2.66 + 7.27$. Factum 15.510 .

§. 160. **S**ubtractio *decimalis* minorem *fractionem decimalem*, or-dine, & gradu bene dispositam, ab altera majori subtrahit. v. g. Sint per-

ticæ 3.423 subtrahen-dæ a 5.821 remanebunt 2.398 .

$$\begin{array}{r} 5.821 \\ 3.423 \\ \hline 2.398 \end{array}$$

SCHO-

SCHOLIION.

§. 161. **S**I *fractiões decimales* ab integris subtrahi debeant, tunc tot *intero* apponantur cyphræ, quot fuerint ordinēs numeri subtrahendi v. g. sint perticæ

3.425 subtrahendæ a perticis 5. remanebunt 1.575.

$$\begin{array}{r} 5.000 \\ 3.425 \\ \hline 1.575 \end{array}$$

§. 162. **M**ultiplicatio *decimalis* docet *fractiões decimales* multiplicare, & peragitur eo prope modo, quo simplex multiplicatio (§. 32.) nisi, quod virgulæ ultimi characteris tam multiplicandi numeri quam multiplicatoris sibi addantur, atque ex additione utriusque, virgulæ tandem in ultimo caractere facti resulent. Quod si numeri deficient, locum suppleant cyphræ, ut in exemplis patefcet. v. g. multiplicandæ sint perticæ 6.03 per 2.6, factum erit 15.678. seu

6.03 per 2.6, fa-

ctum erit 15.678. seu

6.03 × 2.6 = 15.678. Ideo autem supra 8 tres

$$\begin{array}{r} 6.03 \\ 2.6 \\ \hline 3618 \\ 1206 \\ \hline 15.678 \end{array}$$

virgulæ appositæ sunt, quia virgulæ numerorum 6, & 3 adduntur.

Item perticæ 0.613 × 75 = 0.45975

$$\begin{array}{r} 0.613 \\ 75 \\ \hline 3065 \\ 4291 \\ \hline 0.45975 \end{array}$$

De

tiplicatoris $5.4\overset{\prime}{3}$. Sed numerus aliquis minor, qui nullum integrum complectitur, nempe $6\overset{\prime}{7}$ juxta exigentiam hujus numeri $5.4\overset{\prime}{3}$ multiplicatur.

§. 165. *Divisio decimalis docet fractiones decimales dividere, fitque eo prorsus modo, quo divisio simplex (§. 42.) attamen ut in producto, seu in quoto virgularum superimponendarum numerus sciatur, debet virgulæ divisoris a dividendo subtrahi. v. g. debeant dividi*

$$2.6\overset{\prime}{7}42 \text{ per } 3, \text{ prodibit } \begin{array}{r} \overset{\prime\prime\prime}{3} \mid 2.6\overset{\prime\prime\prime}{7}42 \mid 891.4 \end{array}$$

quotus 891.4 . Toties quippe continetur *divisor* in *dividendo*, Proba fit per *multiplicationem* (§. 162.)

SCHOLION. I.

§. 166. **Q**uod si vero pauciores numeri sint in *quoto* seu *producto* quam virgularum ordo deposceret, tunc eisdem totidem cyphræ adjiciantur, quot sufficiant, v. g. dividenda sint $0.0000006\overset{\text{VII VIII IX X}}{2}66$ per $26\overset{\text{IV V VI}}{.}$ prodibit *quotus* 241 , quem tamen sic adscribere oportebit: $0.000241\overset{\text{IV V VI}}{.}$

Quod si denique progressio *fractionum decimalium* vel in *divisore*, vel in *dividendo* interrupta sit, suppleatur per cyphras, quemadmodum dictum est (§. 164.)

CORROLLARIUM.

§. 167. **F**acile ex dictis ratio patet plura *integra* ad *fractiones* reducendi. v. g. 3 *integra* reducere esset animus in partes *millesimas*, fieret $\frac{3000}{1000}$ vel $3.000\overset{\text{P}}{.}$. Quod si autem *fractiones* quæ-

114 ARITHMETICÆ CAP. XIII. DE COMPUTO DECIMALI.

quæpiam minor reducenda foret ad majorem *fractionem decimalem*
 v. g. $\frac{7}{2}$ in partes *millies millefimas*, tum *numerator* 7 multiplicatur
 per 1000 000, eruntque 7000 000; hæc dividantur per de-
 nominatorem 22, & *quotus* erit $\frac{0.318636}{1.000000}$ seu 0. 3 1 8 6 3 6.

Verum tamen hæc *decimalis fractio* non exprimit accurate $\frac{7}{2}$,
 remanent quippe in divisione 8, seu defectus aliquis minor,
 quam $\frac{1}{1000000}$, ideoque vocatur fractio approximans ad ve-
 rum : faciunt tamen plurimum consimiles reductiones ad
 deprehendendam minorem, & minorem differentiam; quo
 enim partes reducuntur in plures partes, eo fiunt magis
 divisibiles, quod in approximatione radicum
 maxime elucet.

Finis Institutionum Arithmeticarum.



IN-



INSTITUTIONES GEOMETRIÆ.

CAPUT I.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIONES.

§. 1. *G* **Geometria** est scientia, qua dimensiones docet quantitatem continuerum.

Dicta est Geometria, ἀπὸ τῆ ρῆ γων μετρεῖν, non quidem quod terram solummodo dimetiri doceat, cum rebus plurimis applicari *Geometria* possit, & quadam ratione idem sit quod *Mathesis* (Proleg. Num. III.) sed quod primi Geometriæ, qui olim exstiterunt, *Geometria* legibus præcipue ad terræ dimensiones uterentur. Agit autem *Geometria* de dimensionibus abstractis prout in mente sunt; Hinc nemo punctum geometricum: vel lineam stylo describere valet; ut tamen oculis exhibeantur, describi solent in chartis, fiuntque tum *puncta*, & *lineæ physicae*.

§. 2. *A* **AXIOMATA**, quantitatem continuam attinentia sunt hæc præcipua:

I. Totum est majus sua parte, & æquale omnibus partibus simul sumptis.

II. Si æqualibus æqualia vel addantur vel demantur, remanebunt æqualia.

III. Si inæqualibus vel addantur vel demantur æqualia remanebunt inæqualia.

IV. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt æqualia inter se

V. Quæ ejusdem dimensionis dimidia sunt, sunt inter se æqualia. Item, quæ ejusdem extensionis dupla, tripla, quadrupla, sextupla &c. sunt, sunt pariter inter se æqualia.

VI. Si extensio prima major fuerit, quam secunda, & secunda rursus major, quam tertia, erit eadem extensio prima major tertia.

VII. Quæ mutuo superimposita congruunt, sunt æqualia.

DEFINITIO II.

§. 3. **Q**uantitas *continua* est, cujus partes communibus terminis copulantur; neque suapte natura distinctæ sunt. Tres sunt species *quantitatis continua* nempe: *linea*, *superficies*, & *solidum*.

DEFINITIO III.

§. 4. **L**inea est longitudo sine latitudine, & profunditate considerata; & tum describitur, cum punctum ab uno loco ad alterum moveri concipitur.

DEFINITIO IV.

§. 5. **P**unctum est id, quod partibus caret.

DEFINITIO V.

§. 6. **S**uperficies est longitudo cum latitudine, sed sine altitudine sive profunditate, quæ tum describitur, cum lineam moveri imaginamur.

DEFINITIO VI.

§. 7. *Solida* dicuntur illa, quæ in longitudinem, latitudinem, & profunditatem extensa sunt. *Solidum* tum habetur, cum superficies planas, & transversas concipimus.

DEFINITIO VII.

§. 8. *Similia* sunt, quæ non possunt distingui nisi per compræsentiam. Ait *Leubnitius*. Videatur apud hominem A aureus nummus, & apud hominem B simillimus nummus aureus, putabitur esse idem, nisi compræsentia eos distinguat. Imo si in diversis locis aut diverso tempore viderimus prorsus similia v. g. ædificia, distinguuntur etiam per compræsentiam utriusque in animo, cum reipsa non possint coëxistere; atque ideo quantitas est discrimen similibus, licet eadem sit in utroque nummo.

DEFINITIO VIII.

§. 9. *Perimeter* dicitur illud continuum, quo figura aliqua seu plana seu solida circumcluditur.

DEFINITIO IX.

§. 10. *Figura* est illud continuum, quod ambiente perimetro tanquam suo termino continetur, estque pro diversis dimensionibus diversa.

DEFINITIO X.

§. 11. *Distantia* est linea recta seu brevissima intra duos terminos: Juxta triplices dimensiones nempe longum, latum, profundum, Geometria triplex est; prima, quæ agit de lineis, diciturque *Euthymetria*; altera, quæ de superficiebus agit: tertia est *Stereometria*, quæ solidorum doctrinam complectitur.

tur. *Geodasia* demum ea appellari consuevit, quæ proxim Geometricam cum theoria conjungit.

C A P U T II.

De Dimensione linearum.

DEFINITIO I.

§. 12. *L* *Linea recta* est omnium brevissima, quæ ab uno puncto ad aliud duci potest; hinc ab uno puncto ad aliud duæ rectæ duci nequeunt. *Linea curva* est, quæ non brevissima via sed per ambages ex uno ad aliud punctum tendit.

Si *linea recta* ducenda sit in charta, regula ebena, ne charta maculetur, præfertur aurichalcinæ: in faxis vel lignis filum tensum, & colore tinctum adhibetur: in campis autem vastioribus *linea recta* designatur, cum duo baculi infiguntur, atque tertius intermedius ita collocatur, ut directus in unum oculus alios duos non videat.

POSTULATUM I.

§. 13. *A* B uno puncto ad alterum quodlibet lineam rectam ducere.

POSTULATUM II.

§. 14. *L* Ineam rectam in infinitum extendere.

PROPOSITIO I.

Tab. 1.
Fig. 1.

§. 15. *D* *Atam lineam rectam* AB bifariam dividere. Circini apertura sit in longitudine lineæ AB, ponatur circini pes in A, fiatque arcus versus C, & D; Iterum ponatur

ponatur circini pes in B, fiatque iterum arcus versus C, & D; Si ex puncto C in D, quo arcus se secant, linea recta ducatur per A, B, dividet hæc lineam AB bifariam.

Nam ducantur ex centris A, & B utriusque lineæ rectæ in C, & D, hæ erunt æquales inter se (§. 2.) Num. IV. Sunt enim æquales uni tertio nempe AB. Ergo cum CB, DB tantum distent a centro B, quantum CA, DA a centro A, sequitur, quod dimidium spaci in C, & D contineatur, & linea AB sit bifariam divisa.

In campo media linea deprehenditur, cum funiculus primum per totam illam lineam tenditur, tum vero extremitates funiculi componuntur; altera extremitas complicati funiculi dabit lineæ medietatem.

PROPOSITIO II.

§. 16. *E*adem circini apertura lineam in tres partes æquales dividere.

Sit linea data AB. aperi circinum in longitudine lineæ, & ex centro A describe arcum CBD; iterum ex centro B duc arcum CAD, in horum duorum arcuum sectione superiore C denuo colloca pedem circini, & describe circum æqualem AEGHFB; tum servata semper eadem circini apertura ponatur pes circini in E, & fiat sectio in G: rursus ponatur pes circini in F, & fiat sectio in H; Si ex G & H duæ rectæ in D ducantur, scindent illæ lineam AB in I, & K, facientque tres partes æquales. Tab. I.
Fig. 2.

Nam latera hexagoni (§. 286.) $EG + GH + HF. EF :: AI + IK + KB. AB.$

COROLLARIUM.

§. 17. *L*inea in partes quocunque commodissime dividi potest beneficio circini proportionalis (§. 116.) Sit y. g. Tab. I.
Fig. 3.
linea

linea AB in 100 partes æquales dividenda : accipiatur beneficio circini manualis C tota lineæ distantia AB ; alter vero circulus nempe proportionalis FG eousque aperiatur , ut circinus manualis C uno pede in E tangat numerum 100 lineæ arithmeticæ (in tot enim partes lineam esse dividendam supponimus) & altero pede in D pariter numerum 100 contingat. Sic disposito circino proportionali , accipiatur beneficio manualis circini C primo distantia numeri 10 in utroque crure, & hæc notetur in linea AB , tum distantia numeri 20 , & hæc rursus transferatur in lineam AB , & sic usque ad 100 , habebiturque linea AB in 100 æquales partes divisa.

DEFINITIO II.

Tab. 1. §. 18. Fig. 4. **L** *Inca parallela sunt , qua equaliter ubique a se mutuo distant, neque unquam concurrerent , cisi in infinitum protraherentur.*

Tab. 1. §. 19. Fig. 5. **L** *Incis rectis opponuntur lineæ inclinata, quæ ab invicem hoc quidem loco magis , altero loco unius distant.*

6.7. & 8. Fig. 5. **Contingentes** , quæ in uno se puncto tangunt , non tamen secant *Fig. 6.* **Concurrentes** , quæ in uno puncto conveniunt , & ulterius non pergunt. *Fig. 7.* & **secantes** , quarum una secat alteram *Fig. 8.*

PROPOSITIO III.

Tab. 1. §. 20. Fig. 9. **D** *ata linea recta AB ex dato puncto C parallelam ducere. Eucl. I. 2.*

: Colloca circini pedem in puncto arbitrario lineæ AB. v. g. in D , & forma arcum EC , transfer eandem circini aperturam in F , & fac arcum GH ; tum desume distantiam EC , & signa eandem ex G in H. Si per punctum H & C lineam rectam duxeris IK , erit parallela lineæ AB.

Nam cum EC , & GH æquales arcus sint , æquali radio
DE,

DE, & FG descripti, tantum distabit GH, quantum EC ; ideoque & lineæ IK, & AB erunt parallelæ (§. 18.).

Alio Modo.

§. 21. **S**it ex puncto C parallela ducenda lineæ AB : duc Tab. I.
 primum ex hoc puncto C ad quodcunque punctum Fig. 10.
 lineæ AB v. g. ad F lineam *concurrentem* ; hanc transversam li-
 neam metire circino, servataque eadem apertura, pone al-
 terum circini pedem in quocunque puncto lineæ AB v. g. in
 D, atque duc arcum in E : rursus assume distantiam FD, &
 altero circini pede in C posito, duc alterum arcum in E ; Ita-
 que si ex puncto, in quo se hi duo arculi secant, duxeris li-
 neam rectam in C, erit linea CE ipsi AB parallela.

§. 22. **U**tur etiam frequenter *parallelismo*, quod instrumen- Tab. I.
 tum commodissime ex ebano ligno præparatur, Fig. 11.
 constatque duabus regulis AB, & CD, quæ lineæ duobus
 retinaculis EE, & FF, ubique ejusdem distantiæ a se invi-
 cem disitis, copulantur, ut hac ratione regulæ ambæ æqua-
 liter, ac diversimode diduci, aut contrahi, atque ad regula-
 rum distantiam parallelæ formari in charta queant.

DEFINITIO III.

§. 23. **L**inea perpendicularis, quæ & normalis dicitur, est linea
recta in alteram ita descendens, ut in nullam partem inclinet,
scilicet angulum rectum efficiat. (§. 54).

PROPOSITIO IV.

§. 24. **I**n linea AB ex puncto C lineam perpendicularem erigere CF. Tab. I.
 Ponatur circini pes in C, designenturque duo Fig. 12.
 arbitraria puncta v. g. D, & E, a puncto C æquedistantia.
 Amplietur paulisper circini apertura, atque tam ex D, quam
 ex E fiant arcus in F. ab interfectione arcuum duc lineam re-
 ctam in C, hæc nempe FC erit perpendicularis ipsi AB.

Q

Nam :

Nam : ducantur lineæ rectæ ex F in D & E. Jam $DC = CE$, $DF = FE$. Igitur & anguli FCD , & FCE sunt æquales, & linea FC erit perpendicularis (§. 54).

Alio Modo.

Tab. I. §. 25. **A**ccipe *normam*, vulgo *Winkel-Hagen*, atque hujus
Fig. 13. alterum crus NO ita lineæ AB adapta, ut punctum N accuratissime punctum C contingat, tum vero alterum crus MN exhibebit lineam *perpendiculararem*. In campis quoque, ut perpendicularis erigatur, utimur *norma*, sed paulo majore.

§. 26. **S**i *normam*, num exacta sit, examinare cupias, aut in illius defectu aliquam conficere tuo usui velis : accipe chartam simplicem, hanc presse complica, ut duplex sit, tum chartam hanc denuo complica, ut quadruplex sit, hac tamen ratione ; ut prima plicatura accurate sibi correspondeat, habebisque interim *normam exactam*, quæ & *perpendiculararem*, & *rectum angulum* exhibeat.

PROPOSITIO V.

Tab. I. §. 27. **E**X puncto *superne dato* C lineam *perpendiculararem ad* A B *dimittere*.
Fig. 14. Circini pede in C collocato fac sectiones arbitrarias æquales in D, & E ; tum servata eadem circini apertura ; fac ex D & E arcus in F. Si ex arcuum sectione F in punctum C lineam rectam duxeris, CG, erit *perpendicularis* descendens ipsi A B.

PROPOSITIO VI.

Tab. I. §. 28. **I**n initio, vel fine lineæ AB lineam *perpendiculararem erigere*.
Fig. 15. Pone circini pedem in puncto arbitrario supra A, & B v. g. in O ; ex O tanquam centro forma circulum hac ratione, ut peripheria punctum A contingat, & lineam AB
in

in E fecet : Jam ubi ex E per centrum O lineam rectam duxeris ad peripheriam circuli C, atque ex puncto contactus C lineam rectam dimiseris in A, erit hæc linea CA ipsi AB perpendicularis.

Nam $OA M = OEM$, & $OAN = OCN$; Igitur ON perpendicularis ipsi AC, & OM perpendicularis ipsi AB (§. 23); sed ON parallela est ipsi AB, & OM parallela ipsi AC (§. 18); ergo & AC perpendicularis ipsi AB.

Alio Modo.

§. 29. **D**efige circini pedem in A, & fac ad arbitriam distantiam arcum CDF; eadem servata circini apertura duc ex centro C arcum, qui priorem in D secet; rursus eadem servata circini apertura ex intersectione arcuum D fac arcum in E. Tum duc rectam ex C per punctum sectionis D ad arcum E, ubi linea hæc recta arcum E contigerit, ibi erit punctum perpendicularis descendens: itaque duc rectam ex E in A, hæc erit perpendicularis ipsi AB. Tab. 1.
Fig. 16.

COROLLARIUM.

§. 30. **S**I super eandem lineam rectam AB plures perpendiculares descenderint, erunt illæ inter se parallelæ; Cum enim perpendiculares in nullam partem inclinent, distabunt a se mutuo æqualiter, nec poterunt unquam concurrere (§. 18). Tab. 1.
Fig. 17.

DEFINITIO IV.

§. 31. **L**inea Horizontalis v. g. AB est, ad quam radius ex terra centro C ductus, est perpendicularis. Tab. 1.
Fig. 18.

Percommode *linea horizontalis* ducitur ope *libellæ*, in qua pondus ex filo pendulum naturali gravitate versus terræ centrum.

- Tab. I.* *Fig. 19.* *trum fertur. Alia libella est triangulum ABC æquicrurum, cuius basis AB in mediõ notam habet; itaque si filum plumbeo globulo illigatum ex centro C suspendatur, illudque filum notam mediæ basis D contingat, linea illa seu planum, cui libella insidit, erit horizontalis. Alia libella est tubus vitreus AB spiritu vini sic impletus, ut aër in quantitate unius guttæ in tubo remaneat. Tum orificium infusionis B hermetice claudatur: si itaque tubus ita collocatus fuerit, ut aërea illa portio medium tubi C teneat, situs hujus tubi cylindrici erit horizontalis.*

In omni prope usu instrumentorum geometricorum v. g. *Mensula Pratoriana* &c. præcipua esse cura debet *linea horizontalis*, ut experimenta rite fiant.

DEFINITIO V.

- Tab. I.* *Fig. 21.* §. 32. *Linea verticalis v. g. AB est, qua linea horizontali CD perpendiculariter insidit.*

- Tab. I.* *Fig. 22.* Erigitur *linea verticalis* exacte ope hujus instrumenti *geometrici*: Est lignum AB, per cuius medium linea utrique lateri parallela ducitur C: in summitate lineæ suspendatur filum, ex quo globus plumbeus dependeat: si itaque filum recta descendat secundum lineam mediam C, tunc baculus, cui latus unum tabulæ AB bene applicatum sit, respectu soli, *lineam verticalem tenebit.*

DEFINITIO VI.

- Tab. I.* *Fig. 23.* §. 33. *Linea diagonalis est illa: v. g. CD, qua angulos oppositos quadrangulorum v. g. ACBD copulat. Dicitur etiam diameter.*

DEFINITIO VII.

- §. 34. *Linea coincidens est, qua alteram, cui applicatur, suam aequalitatem, tetam, tegit.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

§. 35. *L*inea, quæ sibi mutuo congruunt, & æquales, & similes sunt. Nam juxta axioma 7 §. 2. quæ sibi superimposita congruunt, habent eandem extensionem, ergo & æqualitatem. Præterea, lineæ, quæ eandem prorsus habent extensionem, non possunt distingui, nisi per comparæntiam §. 8, ergo sunt quoque sibi similes. *Quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO VIII.

§. 36. *L*inea recta AB ex dato puncto C lineam æqualem describere. Tab. I. Eucl. I. 2. Fig. 24.

Circini pede posito in A describatur arcus in extensione DC, rursusque posito circini pede in puncto C, eadem apertura describatur arcus DA, radius AD = CD §. 233. Ex centro A describatur in apertura AB arcus BEF, qui secetur in E a radio DE. Rursum e centro D describatur arcus FEG, qui secetur in H a radio DH. hæc recta CH erit æqualis datæ lineæ rectæ AB.

Nam radius DE = DH §. 232. ergo etiam AE, & CH sunt æquales, juxta axioma 2. §. 2. sed radius AB = AE §. 232. Igitur etiam erit æqualis radio CH. axioma. 4. §. 2. *Quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO IX.

§. 37. *D*atis duabus lineis rectis inæqualibus, ex majori partem auferre, ut fiat æqualis minori. Tab. I. Fig. 25.

Sint duæ lineæ inæquales AE, & CD, & oporteat majorem AE facere minori CD æqualem: pone igitur circini pedem in A, apertura CD, ubi arcus lineam AE in B secuerit, erit AB = CD. axioma 7. §. 2.

PROPOSITIO X.

*Tab. 1. §. 38. D*atis duabus lineis rectis AB, & CD tertiam proportionalem FB invenire. Eucl. VI. II.
Fig. 26.

Super majorem lineam AB ex centro G describatur semicirculus AEB; tum longitudo lineæ CD transferatur ex B in E. Ex E demittatur linea perpendicularis EF in lineam AB §. 27. linea FB erit tertia proportionalis ad AB, & CD. seu: FB. CD :: CD. AB.

Nam angulus AEB est rectus §. 241; ab angulo recto E dimittatur perpendicularis EF in AB. triangulum BEF simile erit triangulo ABE §. 87. Ergo ut BE se habet ad triangulum ABE; ita se habet FB ad triangulum BEF; ideoque FB erit tertia proportionalis. Q. E. D.

Tertiam proportionalem continuam invenire licet ope *circini proportionalis* §. 116. sit duarum datarum major = 40. hæc in lineam arithmetica deponatur in numerum 40. altera data minor linea transferatur ab uno crure ex 40 ad alterius cruris 40, & sit = 20. Jam ope circini manualis assumatur distantia numeri 20 a 20 in linea arithmetica, hæc erit tertia proportionalis continua, erit enim = 10. E: ÷ 40, 20, 10.

In inquisitione tertix proportionalis majoris proceditur ordine inverso.

*Tab. 1. §. 39. C*onsimili ratione media proportionalis duarum datarum reperitur: sint datæ EF, & GH, super majori recta EF fiat semicirculus ENF. GH transferatur in MF, atque ex M erigatur perpendicularis ad peripheriam MN, recta NF erit media proportionalis ad EF, & GH seu: EF. NF :: NF. MF, seu GH. Adeo, ut si quadratum formetur ex FN, vel fiat parallelogrammum ex EF × GH, quadratum ex FN sit æquale parallelogrammo ex EF × GH.
Quod

Quod si vero duæ rectæ, quarum media proportionalis quaeritur v. g. AF, & FB in unam lineam redigantur, & super utramque conjunctam semicirculus formetur, tunc non EB sed EF erit media proportionalis; Nam AF ad triangulum AEF, sicut EF ad triangulum EBF.

Ope *circini proportionalis* facillime reperitur media proportionalis (§. 116.) Nimirum utraque datarum linearum transferatur ad lineam arithmetica. Sit major datarum linearum = 36; minor autem = 16. Deferatur major linea ad circini proportionalis lineam Geometricam, ita quidem, ut ab uno termino 36 ad alterum 36 pertingat. Manente sic circino proportionali immoto, defumatur per circinum manualemente distantia 16 a 16 in linea Geometrica, quæ erit inter duas datas media proportionalis; mensurata siquidem in linea Arithmetica, erit = 24. Et $\div 36, 24, 16$.

Cum linea Geometrica passim ad 64 duntaxat extendatur; sicubi major datarum linearum excederet numerum 64, affumantur meræ linearum medietates in linea Geometrica, ac tandem, finita operatione, media proportionalis inventa duplicetur.

PROPOSITIO XL

§. 40. *D*atis tribus lineis rectis AB, AG, & BC, quartam proportionalem CH invenire, quæ sic se habeat ad BC, sicut Fig. 28. AG ad AB. *Eucl. VI. 12.*

Ponatur oblique linea AB, continueturque & AC, subnectatur linea BC, & efficiat quemlibet angulum cum AB, continuetur recta ex C in I, ex G dimittatur recta GH in GI, quæ recta GH sit parallela ipsi AC; erit CH quarta proportionalis petita, seu: CH. BC :: AG. AB.

In *circino Proportionali* quarta proportionalis invenitur hac ratione: tres lineæ datæ in linea arithmetica a centro mensurentur, sitque

fitque prima = 21, secunda = 14, tertia = 9. Jam secunda = 14 deponatur in linea arithmetica transverse ab 21 nimirum ad 21. Manente sic circino proportionali immoto mensuretur distantia a 9 ad 9 lineæ itidem arithmeticæ, quæ erit quarta proportionalis, & = 6. Nam $\div 21, 14, 9, 6$.

Major quarta proportionalis inquiritur modo inverso.

Alio Modo.

Tab. I. §. 41. **I**nvenitur etiam quarta proportionalis sic: *sint tres datae,*
Fig. 29. *nempe: AG, AB, CD, petaturque quarta proportionalis,*
qua sic se habeat ad CD, sicut se habet AG, ad AB.

Ponatur AG in recta linea, & AB formet qualemcunque angulum cum AG. Ex A demittatur perpendicularis ad quamcunque distantiam in C; ex C vero fiat tertia linea CD, parallela ipsi AG. Porro ex D ducatur recta in M parallela ipsi AC, ex M ducatur MI parallela ipsi GB; linea AN, vel potius HI erit quarta hæc proportionalis. Sicut enim AG ad AB; ita CD vel AM ad AN vel HI.

PROPOSITIO XII.

Tab. II. §. 42. **I**nter duas datas rectas, duas alias medias proportionales lineas
Fig. 30. *invenire.*

Sint duæ rectæ datæ AB, & CD. Formentur duæ rectæ, cum angulo recto concurrentes HK, & KL. In linea HK notetur longitudo lineæ AB per OK; in lineam vero KL deponatur linea CD per KP. Rursus ex P, & O ducantur rectæ in Q, ut sit parallelogrammum OKPQ: tum fiant diagonales QK, & PO secantes se invicem in X; linea vero KO transferatur in KZ, ducaturque recta ex O in Z. Porro ex centro O radio OP ducatur arcus ex P in R: assumatur linea RZ; & deferatur ex P in S. Denique linea KP transferatur ex puncto S in punctum T, & ducatur recta ex T per Q in

Q in H. Erit itaque linea P T prima proportionalis M N, linea O H altera proportionalis media F G. seu \div CD, F G, M N, A B.

Nam sit linea P Q seu A B = 64; erit linea P T seu M N = 48, linea H O seu F G = 36, & O Q seu C D = 27. *Euclid. Lib. VIII. Prop. 12.* Et cubus lineæ A B ad cubum lineæ C D est in ratione cubica lateris 4 ad 3.

$$A B = 64, M N = 48, F G = 36, C D = 27.$$

Ope *circini proportionalis* expedita est methodus duas medias proportionales inveniendi. Mensurentur primum duæ datæ in linea Arithmetica, sitque major = 54, minor = 16. Jam linea major = 54 deponatur in linea cuborum seu solidorum a numero 54 transverse ad numerum 54. Hac in apertura circini proportionalis desumatur per aliquem circinum manua-lem distantia inter 16, & 16; hæc erit duarum mediarum proportionalium major, quæ, si mensurata fuerit in linea arithmetica, erit æqualis 36. Porro hanc lineam = 36 transfer in numerum 54, & 54 lineæ cubicæ, atque hac in apertura circini proportionalis desumatur rursus distantia inter 16, & 16. hæc erit duarum mediarum proportionalium minor, & æqualis 24. Et \div 54, 36, 24, 16.

S C H O L I O N.

§. 43. **P**ER numeros inveniuntur duæ lineæ mediæ propor-
tionales hoc modo: sint duæ lineæ datæ, prima
8 pedum, altera 125 pedum, inter has duas oporteat duas
medias proportionales invenire: linea igitur 8 pedum quadretur = 64; tum $125 \times 64 = 800$. Ex 800 extrahatur radix cubica = 20 (§. 149. *Arith.* 20) igitur pedum erit prima inven-
ta linea e mediis duabus proportionalibus. Porro 20 quadren-
dretur = 400. hæc 400 dividantur per primam lineam 8 pe-
R dum,

dum, quotus 50 erit secunda proportionalis inventa seu $\div 8$,
20, 50, 125.

Nam 8 ad 20, 20 ad 50, 50 ad 125 sicut 1 ad 2 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XIII.

Tab. II. §. 44. *PR*imorum terminorum differentia, & prima linea; imo si infi-
Fig. 31. *nita lineæ proportionales ponantur, sunt continuo proportionales.*

Sint lineæ quotcunque proportionales AZ, BZ, CZ &c. proportionalium illarum linearum differentiæ sunt AB, BC, CD, DE &c. & hæ differentiæ una cum ultima quantitate FZ æquales sunt primæ lineæ AZ. Quod si vero lineæ proportionales in infinitum continuentur, evanescit postrema quantitas FZ, ipsæ tamen differentiæ omnes subsequentes sic se habent ad invicem, veluti AB ad AZ; Etenim AZ habet se ad BZ ut BZ ad CZ &c. & iterum: AB ad BZ ut BC ad CZ &c. item ut prima differentia AB ad AZ, ita secunda differentia BC ad BZ &c. Igitur ut prima differentia AB ad lineam AZ, ita cæteræ omnes differentiæ ad suas lineas se habent. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

Tab. II. §. 45. *L*inea quatuor discrete proportionales AB, CD, HI, KL
Fig. 32. *sic comparata sunt, ut extrema duæ AB, & KL simul sumpta majores sint, quam duæ intermedia CD, HI.*

Ex linea AB dematur pars EB, & ex CD dematur FD; ut AE, & CF æqualia sint ipsis HI, & KL; Jam EB sic se habebit ad FD, sicut tota AB ad CD, & HI ad KL, tantoque major erit EB ipso FD; quanto major est AB quam CD. Ergo si ad lineam AB addatur KL, erit tanto major ipsis duabus mediis invicem additis HI, & CD, quanto EB majus est ipso FD; Etenim in AB, & KL simul sumptis continetur etiam HI, & CD: & præterea in duabus prioribus reperitur
pars

pars major EB, quæ in duabus mediis minor est, nempe FD.
Ergo $AB + KL > HI + CD$. Q.E.D.

PROPOSITIO XV.

§. 46. *Linea quottunque, quarum antecedens prima A se habeat ad pri- Tab. II.
mam consequentem E, ut secunda antecedens B, ad secundam Fig. 33.
consequentem F, & sic porro, sic se habent collectæ omnes antecedentes, ad
omnes consequentes, ut prima antecedens A ad primam consequentem E.*

Nam cum sic se habeat A ad E, sicut se habet B ad F &c.
ex hypothesi; ergo etiam sic se habebit A ad B, sicut E ad F;
& B ad C, sicut F ad G; Igitur etiam sic se habebit $A + B$ ad B,
ut se habet $E + F$ ad F. In.º: $A + B + C.D :: E + F + G.H$.
Itaque omnes, quotquot fuerint antecedentes, sic se habebunt
ad ultimam D, ut se habent omnes simul consequentes ad ulti-
mam H; & permutando omnes antecedentes, simul sumptæ
erunt ad omnes consequentes simul sumptas, ut ultima ante-
cedens ad ultimam consequentem, seu ut prima antecedens
ad primam consequentem. Q.E.D.

PROPOSITIO XVI.

§. 47. *Scalam Geometricam, vulgo Feld = Messer Maas = Stab Tab. II.
conficere. Fig. 34.*

Duc lineam rectam AB, quam pro lubito extendere po-
teris in E, F, &c. adijunge 10 alias lineas, ejusdem ab in-
vicem distantiae usque in CD vel CH; hælineæ superius inter
A, & C numeris, 1, 2, 3 &c. insigniantur. Rursum ex A
in B æqualis ab invicem distantiae 10 partes distribue, quas pa-
riter ab A retrograde numeris designa 9, 8, 7, 6 &c. De-
nique transfer lineas obliquas ex 9 in 10, ex 8 in 9, ex 7 in
8 &c.

Itaque si spatium AB accipiatur pro spatio perticæ, tum

R 2

nume-

numeri recto ordine ascendentes notabunt pedes, numeri vero inter 9, & 10, 8, & 9 &c. intercepti, digitos adsignificabunt. v. g. velis juxta hanc scalam dimetiri spatium MN, pone circini pedem alterum in L, alterum protende usque in I, & deprehendes spatium MN esse 1 perticæ, 2 pedum, & 5 digitorum.

§. 48. **H**Ac scala frequentissime utuntur Geometræ, ut magna territoria, & ichnographias minori figura in chartis expriment.

§. 49. **Q**uoniam vero mensurarum Geometricarum sermo incidit; juvat eas potissimum mensuras commemorare, quibus passim Geometræ utuntur; sunt autem: *milliare*, quod *passibus* mensuratur, *Pertica*, *hexapeda*; *orgyia*, quæ *pedibus* constant; *Pes* rursus *lineis* seu *gramis* mensuratur. Attamen, cum hæ mensuræ pro varietate populorum, & provinciarum variant, ea singillatim perstringemus.

Milliare.

| | | |
|---------------------------------------|------|------------------------------------|
| Italicum constat passibus Geometricis | 1000 | Passus propter |
| Anglicum - - - - - | 1250 | diversam ambu- |
| Gallicum commune - - - - - | 2000 | lantium constitu- |
| Germanicum commune - - - - - | 4000 | tionem exacte de- |
| Polonicum - - - - - | 3000 | finiri nequit; di- |
| Hispanicum - - - - - | 3428 | viditur in <i>simplum</i> , |
| Danicum, & Suecicum - - - - - | 5000 | & <i>duplicem</i> . <i>Sim-</i> |
| Hungaricum - - - - - | 6000 | <i>plus</i> seu <i>gressus</i> est |

spatium illud, inter plantas ambulantium interceptum, continetque *duos pedes*; *Passus duplex* est, qui spatium & duarum plantarum, & spatii inter plantas interjacentis complectitur; hinc *4 pedibus* constat.

§. 50. *Pertica* apud Geometras 10 pedes continet, *Pertica* autem Rhenana 12 pedes. *Pertica* autem apud diversos populos sunt diversæ.

Hexapeda Parisiensis 6 pedes regios.

Orgyia est mensura, quæ ambobus brachiis extensis definitur, continetque passim 6 *pedes* vel 3 *ulnas*.

§. 51. *P*Edum maxima quoque est diversitas; mos autem, & usus duplices *pedes* nempe *Parisienses regios*, & *Rhenanos* induxit; Itaque, cum *pes regius Parisiensis* in 1440 partes dividatur, aliarum gentium *pedes* æqualibus partibus sequenti ordine constabunt:

| | | | | |
|------------------------|--------------------------|----------------------|-------|------|
| Pes regius Parisiensis | 1440 | Londinensis | - - - | 1350 |
| Rhenanus | - - - 1391 $\frac{1}{4}$ | Suecicus | - - - | 1320 |
| Vetus Romanus | - - - 1320 | Augustanus | - - - | 1313 |
| Viennensis | - - - 1400 | Lipsiensis | - - - | 1397 |
| Norimbergensis | - - - 1346 $\frac{1}{4}$ | Cracoviensis | - - - | 1580 |
| Batavus Lugdunensis | 1390 | Constantinopolitanus | - - - | 3140 |
| Amstelodamensis | - - - 1253 | Græcus | - - - | 1350 |
| Pragensis | - - - 1338 | Vetus Hæbræus | - - - | 1590 |
| Lisabonensis | - - - 1387 | | | |
| Bononiensis | - - - 1682 $\frac{2}{3}$ | | | |
| Venetus | - - - 1540 | | | |

§. 52. *A* Pud Geometras, accommodata ad Arithmetica decimalem partitione, pertica dividitur in 10 *pedes*, *pes* in 10 *digitos*, *digitus* in 10 *lineas* seu *grana*.

C A P U T III.

De Angulis.

DEFINITIONES.

§. 53. *A*ngulus est intervallum sub inclinatione duarum linearum collato. Tab. II. *Æum*. Unde fit, ut pro linearum varietate anguli Fig. 35, varii sint. Generaliter angulus alius est *rectilineus*, qui lineis 36, 37. *rectis*,
R 3

rectus, fig. 35. alius *curvilineus*, quem curvæ lineæ efficiunt, fig. 36. alius *mixtus* fig. 37.

Tab. II. §. 54. *Angulus rectus* dicitur intervallum collectum ab inclinatione aequali lineæ incidentis. Quo casu incidens dicitur perpendicularis. Fig. 38.

Tab. II. §. 55. *Angulus obliquus* dicitur intervallum, ab inclinatione inæquali lineæ incidentis collectum. Estque vel obtusus, vel acutus: hic minor est recto. Fig. 39; ille vero major. Fig. 40.

§. 56. *Anguli vertex* vocatur punctum illud, in quo due lineæ inclinatae ita sibi occurrunt, ut se tangant.

PROPOSITIO I.

Tab. II. §. 57. *Datum* angulum ABC in duos æquales dividere. Eucl. I. 9. Fig. 41.

Sit triangulum ABC, ponatur circini pes in B, fiantque arbitrariæ æquales utrinque abscissiones in D, & E, ex puncto B demittatur perpendicularis BG, quæ lineam DE in medio fecet (§. 15.) eritque angulus DBF = FBE.

Nam mensura anguli ABC est recta DE. atqui hæc est in duas æquales partes in F divisa; Igitur & angulus ABC erit in duos æquales angulos divisus, nempe in DBF, & FBE.

PROPOSITIO II.

Tab. II. §. 58. *Describere* ex puncto A data recta lineæ AB æqualem angulum ipsi DCE. Eucl. I. 23. Fig. 42.

Sit lineæ AB, transfer lineam CD in AF, & lineam CE in AG; ex centro A radio AG duc arcum GKF; tum accipe mensuram lateris DE, & posito circini pede in centro F duc

duc arcum I H L M. Conjunge puncta A H, & H F lineis; & erit
angulus F A H = D C E.

Nam linea A G = A H (§. 232.) sed A G = C D; ergo
etiam A H = C D. Item A F = C D (§. 2. Axiom 7.) Porro F M
= E D, sed F M = F H, ergo etiam F H = D E. Igitur cum,
datis duorum triangulorum æqualibus lateribus, Anguli quo-
que, qui æqualibus lateribus opponuntur, æquales sint, *Eucl.*
I. 8. Angulus F A H = D C E. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

§. 59. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.*

Etenim anguli recti fiunt per descensum lineæ perpendi-
cularis in lineam rectam (§. 54.) sed linea perpendicularis in
neutram partem inclinat (§. 23.) Igitur uterque angulus rectus
æqualis est. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

§. 60. *Si super lineam rectam A B incidit quæcunque alia linea recta Tab. II.
C D sive E D; anguli C D A, & C D B, sive E D A, & Fig. 43.
E D B erunt aut duo Anguli recti, aut duobus rectis æquales. Eucl. I. 13.*

Dum perpendicularis in lineam rectam incidit, patet, an-
gulos esse duos rectos (§. 54.) Quod si vero linea oblique incidat,
ut E D; erige perpendicularem D C, quæ perpendicularis
faciat duos angulos rectos C D A, & C D B (§. 59.) Igitur ob-
tuso angulo A D E aufer angulum C D E, & relinquetur angu-
lus A D C: Acuto autem angulo E D B adjice acutum C D E,
erit rursus angulus rectus; ergo anguli E D B, & A D E sunt
duobus rectis æquales. Q. E. D.

DEFINITIO.

§. 61. *Anguli A E C, & C E B vocantur contigui; quia com- Tab. II.
muni lateri E C adjacent. Anguli vero A E D, & Fig. 44.
C E B*

CEB vocantur *anguli verticales oppositi*; quia in concursu vertices suos tangunt.

PROPOSITIO V.

Fig. ead. §. 62. *Si* dua linea recta AB, & CD se mutuo secuerint in E, angulos ad verticem oppositos nempe AED, & CEB, item AEC, & DEB, æquales efficiunt. Eucl. I. 15.

Sive angulus CEB sive angulus AED, accipiatur cum angulo obtuso AEC, semper efficiunt angulos duobus rectis æquales (§. 59.) ergo, si angulus hic communis AEC ablati fuerit ab utroque angulo acuto AED, & CEB, remanebunt anguli hi acuti æquales (§. 2. *Axiom.* 2); Et iterum: sive angulus AEC, sive DEB assumatur cum angulo CEB, rursus facient angulos duobus rectis æquales (§. 59;) Igitur, si & hic communis angulus CEB ablati fuerit, remanebunt & hi duo obtusi anguli AEC, & DEB æquales (§. 2. *Axiom.* 2.) Igitur anguli ad verticem oppositi sunt æquales. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

§. 63. **E**X hoc consequitur: lineas illas, quæ angulos, ad verticem oppositos, æquales efficiunt, debere esse rectas; fecus enim, si una earum v. g. in F declinaret, anguli ad verticem oppositi æquales minime forent.

COROLLARIUM II.

Tab. II. §. 64. *Fig. 45.* **S**ic quoque angulus *incidentiæ*, & angulus *reflexionis* est idem, cujus vel maxime in ludo tudiculari rationem haberi oportet: sit globus A, quocum impellere cupias globum B, sitque obex recti linearis CD; angulus *incidentiæ* erit AEC, & angulus *reflexionis* BED: si igitur globus secundum rectam AEF impellatur, reflectetur ex E in B, & alterum globum B impellet; Nam latus ED utrique triangulo BED, & DEF commune est: latus vero BD = DF, & angu-

angulus uterque ad D rectus, propter perpendicularem ipsi CD (§. 59) adeoque & $EB = EF$ *Eucl. I. 8.* : ergo angulus ad verticem oppositus $DEF = AEC$; & consequenter angulus *incidentiæ* AEC æqualis angulo *reflexionis* BED .

DEFINITIO.

§. 65. **A**nguli *externi* sunt, qui sunt extra parallelas v. g. *Tab. 11.* $G, H, \& N, O.$ *Interni* autem, qui sunt intra parallelas v. g. $I, K, \& L, M.$ *Alterni* autem anguli vocantur, qui intra duas parallelas a se sunt averfi v. g. $I, M, \& L, K.$ *Fig. 46.*

PROPOSITIO VI.

§. 66. **S**i linea transversa EF secet duas parallelas $AB, \& CD,$ *Fig. ead.* erunt anguli *alterni* $IM, \& LK$ æquales. 2do. angulus *externus* H erit æqualis *externo* opposito $N,$ & G æqualis $O.$ 3tio. Duo *interni oppositi* $LI, \& KM$ erunt duobus angulis *rectis* æquales.

Nam imo : $H = I$ (§. 62), & propter parallelas $AB, \& CD$ angulus $H = M$: ergo etiam $I = M$ (§. 2 *axiom. 4.*) Idem dicendum quoad angulos obtusos $G = K, \& G = L.$ ergo $\& K = L.$

2do. Ex mox dictis $H = M, \& M = N$ (§. 62). ergo $\& N = H.$

3tio. $G, \& H$ sunt duobus *rectis* æquales (§. 60). sed $M = H, \& G = K$; igitur $\& M, \& K$ sunt duo anguli duobus *rectis* æquales. *Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIUM I.

§. 67. **S**i itaque in duas lineas rectas AB, CD recta incidens *Fig. ead.* linea EF alternatim angulos æquales inter se fecerit; lineæ illæ rectæ $AB, \& CD$ erunt inter se parallelæ. *Eucl. I. 27.*

COROLLARIUM II.

Tab. II. §. 68. **S**I in tres lineas parallelas AB, CD, EF una linea perpendicularis, vel plures v.g. GH, & IK descenderint, facient in omnibus parallelis angulos rectos.
Fig. 47.

DEFINITIONES.

§. 69. **A**nguli ad centrum sunt, quorum vertices in centro conveniunt. *Anguli ad peripheriam*, quorum vertices ad circumferentiam excurrunt; hi etiam aliter dicuntur *anguli inscripti*. *Anguli circumscripti* sunt, quorum latera circumcum attingunt; vertex autem extra circumcum situs est. *De his infra*

Hactenus de lineis, & angulis egimus, posthac de figuris agemus; Est autem *figura*, spatium undique circumclusum.

CAPUT IV.

De Triangulis.

DEFINITIONES.

§. 70. **T**riangulum est, quod trium linearum concursu formatur; hæc vero lineæ latera trianguli nominantur.

§. 71. **T**riangulum aliud est planum *rectilincum*, quod ex rectis lineis constat: aliud *sphericum*, quod ex arcibus circulorum conficitur. Triangulum *rectilincum* porro multiplex est: aliud *rectangulum*, dum unus angulus rectus est, seu 90 graduum: aliud *acutangulum*, cujus tres anguli acuti sunt: aliud *obtusangulum*, seu *amblygonium*, cujus unus angulus est obtusus.

§. 72. **R**atione laterum dividitur triangulum in *aquilaterum*, cujus omnia latera sunt æqualia: & *aquicrurum*; quod & *Isosceles* dicitur, quod duo tantum latera æqualia habet: ac tandem *scalenum*, cujus nullum latus est alteri æquale.

§. 73. **I**n omni triangulo *reclangulo* maximum latus AB, quod *Tab. III.*
nempe est angulo recto C oppositum, vocatur *Hy-* *Fig. 53.*
potenusa: Illud vero latus AC, quod horizonti est paralle-
lum, vocatur *basis*: denique illud latus, quod perpendicu-
lariter descendit BC vocatur *cathetus*. Ast in reliquis angulis
obliquangulis, simpliciter *latera* vocantur.

§. 74. **C**ætera dicitur etiam triangulum *figura prima*, & *sim-*
plex; quia nempe omnes aliæ figuræ in triangula
resolvi possunt.

S C H O L I O N.

§. 75. **A**ngulos per literas sic determinare consuevimus,
ut media litera angulum trianguli petitem desi-
gnet. v. g. angulus C Fig. 42 exprimitur sic: ECD &c.

P R O P O S I T I O I.

§. 76. **O**mnis trianguli v. g. CDE angulus quivis externus v. g. EDF, *Tab. II.*
duobus internis oppositis v. g. C & E aequalis est. *Fig. 48.*

Nam ducatur ex D, linea DG, parallela ipsi CE; Jam,
quia FC fecat duas parallelas DG, & CE, erunt anguli FDG,
& DCE æquales (§. 65.) & quia etiam linea DE secat lineas
parallelas DG, & CE, erunt pariter anguli GDE, & DEC
æquales. ergo quia angulus DCE = FDG, & angulus DEC
= GDE, erit angulus FDE, continens duos angulos FDG,
& GDE æqualis duobus internis oppositis DCE, & DEC.
Q. E. D.

P R O P O S I T I O II.

§. 77. **I**n omni triangulo; tres anguli simul sumpti, sunt æquales semi-
circulo, seu duobus rectis, efficiuntque gradus 180. *Eucl. I. 32.*
In *reclangulo* autem duo acuti anguli sunt æquales quadrantibus, seu 90 gradibus.

Tab. II. *Fig. 49.* Concipiatur in triangulo ABC linea BD parallela lineæ AC ; hæc duæ lineæ secantur per AB, & hæc tertia secans AB formabit angulos alternos CAB, & ABD æquales (§. 65). Præterea concipiatur linea BC duas parallelas AC, & DB fecare ; hæc secans quoque formabit duos angulos internos nempe ACB, & CBD. Jam ACB + FCB sunt æquales duobus angulis rectis (§. 60.) atqui FCB = ABC + CAB (§. 76). ergo etiam ACB + CBA + BAC æquales sunt duobus angulis rectis. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Tab. II. §. 78. *Fig. 50.* *SI latera trianguli ABC sint inæqualia, etiam anguli ipsi inæquales erunt, & angulus BAC, qui majori lateri BC opponitur, major erit angulo BCA, qui minori lateri AB opponitur.*
Eucl. I. 18.

Dividatur linea AC bifariam in D, ex D ducatur linea in B ; hæc latera AD, DB trianguli ADB, sunt æqualia lateribus CD, DB trianguli CDB ; attamen latus DB cum minus sit, facit angulum DAB minorem, quam majus latus CB, quod angulum CDB constituit majorem recto. Jam ex D erigatur linea perpendicularis in E, ex E ducatur linea in A, angulus DAE = ECD (§. 81). Sed angulus CAB major est angulo CAE, quia hunc continet ; ergo etiam angulus idem CAB erit major angulo BCA. Q. E. D.

Aliter.

Tab. II. §. 79. *Fig. 51.* *INscribatur triangulum ABC circulo ex centro G (§. 291) ; Jam latus, quod majorem arcum subtendit, est majus ; (§. 80) ; major vero arcus est mensura majoris anguli (§. 241) Igitur & latera AB, & BC, & CA inæqualia erunt, & angulus BAC, qui majori lateri BC, majorique arcui BDC opponitur, major erit angulo BCA, qui minore latere BA, minoreque arcu AEB mensuratur. Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

§. 80. **I**N omni itaque triangulo latera æqualia æquales subtendunt angulos ; Et si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt. *Eucl. I. 6.*

COROLLARIUM II.

§. 81. **S**I duo triangula v. g. ADE, & CDE, duo latera *Tab. II.* AE, & DE habuerint, duobus lateribus CE, & *Fig. 50.* DE æqualia ; basim item AD = DC, erunt etiam singuli anguli, singulis æqualibus lineis contenti, æquales. *Eucl. I. 8.* Itaque angulus DAE = DCE. & AED = CED, anguli denique EDA, & EDC cum recti sint, pariter inter se æquales erunt.

COROLLARIUM III.

§. 82. **H**inc etiam, si duo triangula fuerint, quæ habeant æqualem ; alias quippe tres anguli quorumcunque triangulorum, simul sumpti, non constituerent duos rectos, seu 180 gradus (§. 77).

COROLLARIUM IV.

§. 83. **D**enique colligitur : quod si duo, vel plura triangu- *Tab. III.* la v. g. ABG, ACG, ADG, AOG duo latera *Fig. 52.* habeant duobus lateribus æqualia, utrumque utrique ; tunc, quæ angulum his lateribus comprehensum majorem habuerint, habebunt etiam latus tertium, seu basim majorem. Sic in hæc triangula ABG, ACG, ADG, AOG latus AB, AC, AD, AO habent æquale (§. 232). Latus quoque AG est commune omnibus : itaque cum angulus BAG > GAC, vel GAD, erit etiam latus BG > CG, aut DG, aut OG.

PROPOSITIO IV.

§. 84. *IN omni triangulo duo saltem anguli necessario debent esse acuti.*
 Nam si haberet duos rectos, vel duos obtusos, vel unum rectum, alterum obtusum, tertium acutum, falsum esset, quod tres anguli omnis trianguli efficiant duos angulos rectos, quod tamen est demonstratum (§. 77). Etenim obtusus unus, & alter rectus, aut duo obtusi, aut duo recti sine tertio angulo excederent jam duos angulos rectos, aut saltem eosdem adæquarent.

PROPOSITIO V.

§. 85. *Ujuslibet trianguli qualibet duo latera simul sumpta tertio sunt majora.*

Tab. II. Sit triangulum ABC. latus $CA + AB > BC$. Nempe
 Fig. 51. $CA + AB$ est linea curva, a puncto C ad punctum B tendens: CB autem est linea recta inter hæc duo puncta extensa; linea autem recta est brevissima omnium, quæ ab uno puncto ad aliud duci possunt (§. 12). Igitur $CA + AB > CB$.
 Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Tab. III. §. 86. *Si trianguli recta linea DE parallela fuerit basi AC, trianguli*
 Fig. 53. *latera AB, CB secabuntur proportionaliter; ita ut AD eandem proportionem habeat ad DB, quam habet CE ad EB.*

Concipiatur enim linea DE hærerere in B, tum vero, situ ad basim AC parallelo, moveri versus basim AC; ita progrediatur, ut sive tertiam, sive quartam, aut quamcunque partem lateris majoris AB decurrat, eandem etiam partem proportionaliter minoris lateris BC decurrere debeat (§. 40). Atque hinc apparet, motum lineæ transversæ DE velocitorem esse oportere in latere AB, quam CB; latera tamen decursa perpetuam proportionem ostendent.

PROPOSITIO VII.

§. 87. *SI* ex trianguli reſtangi angulo B perpendicularis ducatur in baſim AC; duo nova triangula, qua hac ratione produciuntur, nempe: ADB, & BDC erunt toti triangulo ABC ſimilia, & etiam ſimilia inter ſe. Tab. III.
Fig. 54.

Etenim duo triangula ABC, & ADB habent duos angulos reſtos (§. 54.) majus quidem triangulum angulum B, minus vero D; præterea habent angulum A communem. Ergo & angulus ACB = ABD. (§. 82.) Iterum triangulum CDB habet angulum D reſtum, & angulum DCB communem triangulo maximo ABC; igitur & angulus CBD minoris trianguli erit æqualis angulo BAC majoris trianguli (§. 82.) ergo tria hæc triangula erunt inter ſe ſimilia. Q. E. D.

COROLLARIUM.

§. 88. *UN*de triangula æquiangula ſunt quoque ſimilia. *Eucl.* VI. 4.

PROPOSITIO VIII.

§. 89. *TRI*angula ABC, & EFG, quorum baſes AC, & EG item altitudines BS, & FT ſunt æquales, erunt etiam æqualia inter ſe. *Eucl.* I. 38. Tab. III.
Fig. 55.

Ducatur BD parallela ipſi AC; & CD parallela ipſi AB, fiat parallelogrammum ABDC. Similiter compleatur, & parallelogrammum EFGH; Lineæ præterea perpendiculares BS, & FT æquales ſint *per hypotheſim*; atqui parallelogramma, quæ eandem habent baſim, eandemque altitudinem, ſunt inter ſe æqualia. (§. 181.) Igitur, & ſemiſſes horum parallelogrammorum ſunt æquales inter ſe (§. 2. *Axiom.* 5.) Adeoque cum triangula ABC, & EFG ſint ſemiſſes parallelogrammorum ABDC, & EFGH (§. 196.) erunt dicta illa triangula etiam æqualia inter ſe. Q. E. D. Alti-

Altitudo autem triangulorum defumitur a perpendiculari, a summate trianguli in basim demissa.

PROPOSITIO IX.

Tab. III. §. 90. Fig. 56. **T**riangula ACD , & EGH qua in eadem altitudine, hoc est, intra easdem parallelas constituta fuerint, eam inter se proportionem habens, quam bases AD , & EH . *Euch. VI. 1.*

Sumatur baseos EH quæcunque pars aliquota v. g. media EM , & ducatur recta MG ; erit triangulum EGM media pars trianguli EGH (§. 89.) Igitur recta EM , & triangulum EGM sunt consequentium similes aliquotæ. Auferatur recta EM ex basi AD , quotiescunque potest v. g. ter; ducanturque rectæ DC , FC , GC ; Quia rectæ DF , FG , GA æquales sunt ipsi EM , etiam tria triangula, DCF , FCG , GCA triangulo MGE æqualia erunt singula: ergo quoties EM continetur in antecedente AD , toties triangulum MGE continetur in antecedente ACD , adeoque ut basis AD ad basim EH , ita triangulum ACD ad triangulum EGH . *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Tab. III. §. 91. Fig. 57. **E**x his quoque consequitur: triangula ACB , ADB , AEB , & AFB esse inter se æqualia; æqualem quippe basim, & altitudinem habent.

PROPOSITIO X.

Tab. III. §. 92. Fig. 58. **T**riangula similia v. g. ABC , & DEF sunt inter se in duplicata ratione laterum homologorum AC , & DF . id est: si latus AC fuerit altero tanto majus quam DF , & alia latera utriusque trianguli fuerint similia, triangulum ABC erit quadruplum trianguli DEF . *Euch. VI. 19.*

Fiat GH ad DF , ut AB ad DE , propter similitudinem trian-

triangulorum ABC, & DEF sic se habebit AB ad DE, sicut AC ad DF; atqui ut AB ad DE, ita est DF ad GH; Igitur AC ad GH habet duplicatam rationem ejus, quam habet AC ad DF, aut AB ad DE; sed proportio trianguli ABC ad simile triangulum DEF est ut AC ad GH, nempe composita ex rationibus laterum AC ad DF, & DF ad GH (§. *Aritb.*) ergo triangulum ABC ad triangulum DEF habebit duplicatam proportionem rationis lateris homologi AC ad DF. Adeoque ABC erit quadratum ipsius DEF. Q.E.D.

PROPOSITIO XI.

§. 93. *Trianguli Isoscelis anguli ad basim AB sunt æquales.*

Idem triangulum ACB secunda vice ponatur, sed inversum BCA; Igitur cum in his duobus triangulis ACB, & BCA per *hypotesim* latus AC = BC, & latus CB = CA, angulus item ACB = BCA, erit etiam angulus CAB = CBA, & CBA = CAB. (§. 81.) Q.E.D. Tab. III.
Fig. 59.

COROLLARIUM.

§. 94. *Triangulum igitur æquilaterum est etiam æquiangulum, & vicissim: triangulum æquiangulum est etiam laterum proportionalium.*

PROPOSITIO XII.

§. 95. *Si super latera trianguli rectanguli ABC tria triangula similia æquiangula ADB, BEC, CFA describantur, erit figura CFA, super hypotenusa AC descripta, æqualis aliis duabus figuris similibus super basi AB, & catheto BC descriptis. Eucl. VI. 31.* Tab. III.
Fig. 60.

SCHOLION I.

§. 96. *Idem quoque eveniet, si super lateribus ejusdem trianguli ABC quadrata aut quæcunque alia figura* Fig. ead.
T regu-

regularis, describantur; nam quadratum super hypotenusa AC descriptum, æquale erit utrique quadrato, tam super basi AB, quam super catheto BC descripto. *Eucl. I. 47.* Ad hoc vero, ut triangulum rationale sit, cujus nimirum latera communem quandam rationem exprimant; tribue *hypotenusa* spatia 5, *basi* spatia 4. *catheto* autem spatia 3. Si jam 3 quadraveris (§. 140. *Aritb.*) habebis 9; si quadraveris 4, habebis 16; 16 vero + 9 = 25. Quæ eadem 25 provenient, si numerum hypotenuse 5 quadraveris. Porro maximam utilitatem hæc proportio trianguli rectanguli in omnem geometriam intulit, ut non modo Euthymetriæ commodissime deserviat, sed etiam tabulæ sinuum, & Logarithmorum juxta eam, tanquam fundamentum, sint calculatæ. Ut ut autem hæc propositio loco quadragesimo septimo libri I. *Euclidis* reperiatur; *Euclidem* tamen auctorem non habet, sed *Pythagoram*, qui facile 250 annis *Euclidem* vivendo antecessit, quique ante Christum natum 540 annis floruisse perhibetur; Ab hoc tanti inventum propositionis hujus suæ habitum fuit, ut Hecatomben seu holocaustum 100 boum Diis Largitoribus immolaret; Inde postea *Euclides*, quemadmodum aliorum præstantium Mathematicorum, suam ætatem præcedentium demonstrationes, ita & hanc in *Elementa* sua traduxit.

SCHOLION II.

§. 97. **V**erum, cum hæc quidem quadrata, in trianguli lateribus 3. 4. 5 exarata, triangulum *rationale* constituent; omnia tamen alia triangula irrationalia esse censentur (§. 101. *Aritb.*) veluti illud foret triangulum, cujus *basis* se habeat ut 6, *cathetus* ut 5, *hypotenusa* ut 7. Quadratum quippe *hypotenusa* $7 = 49$, *catheti* vero & *bases* = 61. ex quo habetur: quadratum hujus *hypotenuse* esse inæquale, & incommensurable quadratis *bases*, & *catheti*. Nihilominus modus indagatoribus innotuit, quo triangula ejusmodi, nec rectangula, mul-

to

to minus rationalia, cujuscunque baseos, & catheti, beneficio arithmetices & rectangula, & rationalia reddi queant, quemadmodum illud Pythagoricum & rectangulum, & rationale est:

§. 98. **S**It itaque trianguli *basis* 7, *cathetus* 6, fiat ex 7, numerus quadratus 49, uti etiam ex 6 nempe 36, $49 + 36 = 85$. Itaque 85 adscribantur pro *hypothenuſa*. *Cathetus* porro, & *basis* sic reperitur: 36 subtrahantur a 49, & residuum, nempe 13 apponatur pro *catheto*. Rurfus numerus 6 duplicetur, ut sit 12, & $12 \times 7 = 84$. 84 adscribatur pro *baſi*; atque ita redditum est triangulum *rationale*. Fiat quippe ex *hypothenuſa* 85 quadratum $= 7225$; & ex 84 quadratum $= 7056$; ex 13 quadratum 169: Jam $7056 + 169 = 7225$; quod argumento est, *rationale* esse triangulum, cujus nempe quadratum *hypothenuſæ* æquale sit duobus quadratis *baseos*, & *catheti*. Hac ratione plurima triangula *rationalia* redduntur.

§. 99. **J**Am vero neceſſum est ad ordinem reverti, & Pro-
 positionis Euclidicæ, (§. 95, & 96.) allatæ, de-
 monſtrationem ordiri; nempe: *quadratum hypotenuſæ* AGFC
 æquale eſſe duobus quadratis catheti, & baseos, nimirum CDBL, &
 AEKB. Tab. III.
Fig. 6i.

Nam triangulum GBA = triangulo ACE (§. 89.) quia nempe utrumque componitur ex duobus lateribus GA, & AE cum angulo recto GAC seu EAB, & addito angulo CAB. Jam parallelogrammum AMCE est æquale porallelogrammo seu quadrato $AE \times KB$ (§. 181.) Item parallelogrammum AMCE = parallelogrammo GOBA; quia nempe etiam ACE = GBA, & GOBA = GRSA (§. eodem.) Ergo etiam ABKE = GRSA. Hac eadem ratione discurritur de minori quadrato, ob allegatam nempe rationem triangulum DAC = FBC, & parallelogrammum NCDA = parallelogrammo BC DL (§. 181.) & idem parallelogrammum NCDA = parallelogrammo BOFC; quia nempe DAC = FBC. Denique

T 2

BOFC

BOFC = SRFC. Ergo etiam BCDL = RSFC; ideoque quadratum ABKE + BCDL = quadrato AGFC. Q. E. D.

Tab. III. §. 100. *Fig. 62.* **A** St, cum quidem in triangulo rectangulo ADB, quadratum lateris AB æquivalet duobus quadratis AD + DB; Quod si tamen ex D recta in C demistatur, atque triangu- la ADB, ACD, & DCB similia inter se constituentur (§. 87.) tum qua- dratum totius AB, nempe AMNB æquivalet quadrato linea AC, nem- pe GMHO, & quadrato linea CB, nempe COFB, una cum dupli- ci rectangulo AC × CB nempe AGOC, & OHNF.

Sit linea AB 10 partium, erit quadratum AMNB, 10 × 10 = 100. Linea AC sit 7 partium, hujus quadratum G MHO 7 × 7 = 49. Linea CB sit 3 partium, erit quoque hu- jus quadratum COFB 3 × 3 = 9. Rectangulum unum ex 7 × 3 nempe AGOC = 21; alterum quoque rectangulum æquale 7 × 3 nempe OHNF = 21. At vero hæc omnia 21 + 21 + 9 + 49 = 100. Extrahatur itaque ex 100 radix qua- drata (§. 147. *Arisb.*) radix illa nempe 10 = lateri AB. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

Tab. III. §. 101. *Fig. 63.* **I**N triangulo obtusangulo DEF, quadratum lateris DF, quod obtusum angulum subtendit, æquivalet quadratis duorum alio- rum laterum DE, & EF, cum rectangulo DE × EG bis sumpto.

Nam quadratum lateris DF æquivalet quadratis laterum DG + FG (§. 99.) atqui quadratum lateris DG æquivalet quadratis DE + EG, & insuper rectangulo DE × EG bis sumpto, ut patet ex propositione mox præcedente. Quadra- tum quoque lateris EF æquivalet quadratis EG + FG (§. 99.) ergo etiam quadratum DF erit æquale quadratis DE + FE + rectangulo DE × EG bis sumpto. Q. E. D.

§. 102. **L**ubet modo quædam problemata de triangulis subnectere; per practicas quippe ejuscemodi propositiones Theoremata non raro illustrantur.

PROPOSITIO XIV.

§. 103. *Triangulum æquilaterum super basi CE describere. Eucl. I. 1. Tab. II. Fig. 48.*

Aperi primum circinum apertura CE, & uno pede circini posito in E fac arcum versus D; rursus eadem circini apertura servata, pone circini pedem in C, & fac arcum versus D, ubi se duo arcus secuerint, ibi erit punctum, quo lineæ ex C & E duci debeant, ut triangulum æquilaterum enascatur.

PROPOSITIO XV.

§. 104. *D*atis duabus lineis MN, & OP, quarum MN debeat esse basis, construere Isoscelem. *Tab. III. Fig. 59.*

Fiat $AB = MN$, tum aperiatur circinus apertura lineæ OP, positoque circini pede in B fiat arcus versus C, iterum posito pede in A fiat arcus in C, ad punctum intersectionis arcuum Cducantur lineæ, habebiturque Isosceles.

PROPOSITIO XVI.

§. 105. *D*atis tribus lineis FG, HI, KL triangulum scalenum AB C delineare. *Tab. II. Fig. 50.*

Ducatur linea $AC = HI$, & accepta longitudine lineæ FG fiat ex C versus B arcus; Rursus ex puncto A longitudine KL fiat arcus versus B, ad punctum intersectionis B ducantur rectæ ex A, & C, habebiturque triangulum scalenum ABC.

PROPOSITIO XVII.

Tab. III. §. 106. *D*atis duabus EF, & GH basi nimirum, & hypothenusa delinea-
Fig. 54. *re triangulum rectangulum.*

Delineetur angulus rectus (§. 24, & 25.) fiatque basis AD = ipsi EF. Tum apertura circini GH fiat arcus versus perpendicularem, atque ad punctum intersectionis B ducantur rectæ ex A, & D, habebiturque triangulum rectangulum ABD.

§. 107. *Q*uod si lineæ GF, & IK datæ sint, nimirum basis & hypothenusa, tum in formato angulo recto abscindatur AD = ipsi EF, & DB = IK, atque extremitates harum linearum jungantur recta AB, prodibitque rursus triangulum rectangulum ABD.

CAPUT V.

Instrumenta præcipua Geometrica referuntur, methodusque exponitur, Geodæsiam practice exercendi.

DEFINITIONES.

§. 108. *I*nstrumentum Transportatorium est semicirculus, in 180. gradus divisus. Solet hoc instrumentum passim ex aurichalco, tres circiter digitos in diametro continens, parari, in quo tamen ob parvitatem minuta non exprimuntur; Tab. III. Licebit tamen majori forma tale instrumentum conficere, illi-
Fig. 64. que regulam indere, quæ ad omnes circuli gradus ex centro A moveri queat, & juxta gradus, & minuta angulos ostendat.

§. 109. *Q*uoniam vero etiam chordæ arcuum in notitiam magnitudinis angulorum nos queunt adducere; hinc aliud *Transportatorium rectilineum* habetur, super quo magnitudo

nitudo chordarum omnium graduum, & minorum in semicirculo existentium est designata. Hoc instrumentum describit *Leupold in Theatro Arithmetico - Geometrico* §. 348.

§. 110. *A*strolabium est semicirculus, in suos gradus, & minuta divisus, habens diametro adjunctas utrinque dioptras AC, & mobilem præterea ex centro B regulam, suis quoque dioptris seu pinnicidiis ED instructam, per quarum dioptrarum fissuras oculis aspectus in objecta pateat. Mos est diametro astrolabii affigere *libellam* MN vulgo *Wasser-Waage*, suis dioptris instructam, quæ nos certos reddat de situ astrolabii horizontali. Alia præterea sunt astrolabia, quæ integrum circulum, gradibus suis, & minutis inscriptum, exhibent. Tab. III.
Fig. 65.

§. 111. *Q*uadrans est quarta circuli pars in 90 gradus, quorum quilibet in 60 minuta dispescitur, distributus. Quo major *quadrans* ejusmodifuerit, eo quoque erit utilior. Solet non raro ejus lateri radius cum dioptris affigi AB, aut saltem filum cum pendulo plumbeo C. Hoc quoque instrumentum ad explorandos altitudinum angulos a multis adhibetur. Tab. III.
Fig. 66.

§. 112. *A*cus *magnetica* lineali, dioptrisque instructa atque super stativo Verticali posita, vulgo *Boussole* ad praxim geodæticam a multis adhibetur, præsertim in distantibus brevioribus; ast in longioribus intervallis plerumque utentes ludificat, tum quod in modico circulo exacta nequeat graduum designatio deprehendi, tum quod inconstanti directione excurrat, & borealem limitem falso situ plerumque aberret.

§. 113. *M*ensula *Prætoriana*. Sic dicta ab inventore suo *Joanne Prætorio*, usitatissimum geometrarum instrumentum, & aliis fortasse omnibus non immerito in geodætica praxi anteponendum. Primo quidem, ut rerum omnium initia angustiora esse consueverunt, instrumentum hoc tabula constabat,

bat, super fulcro innixa, atque lineali dioptris instructo; recentissimis vero curis illud accessionibus tantis est locupletatum, ut tum ob fulcri, in tripodem desinentis, firmiorem consistentiam, tum ob omnigenam in omnes directiones mobilitatem, tum etiam ob ipsum, quem prius solum habebat, motum circula-rem, ope epistylii denticulati atque tympani faciliorem redditum, novum hodie atque a veteri omnino diversum censerî debeat. Emendatæ hujus mensulæ omnem descriptionem, & usum in eximio opere, nuper typis evulgato, *de Re Ichnographica* persecutus est *Jacobus Marinonius* Mathematicus Cæsareus, adeo luculente, ut ex mente *Magni Wolffii*, plena jam utilissimo instrumento constet dignitas, nihilque in eo pro Geometricæ praxeos emolumento porro desiderari videatur. Quare sat fuerit, digitum plura scire cupientibus ad limpidi-ssimum hunc fontem intendisse, cum alioquin mihi compendiis studentî non liceat præclarissimi auctoris justa vestigia relegere; minus, absolutam doctrinam mutilare. Qui instrumento hoc bene uti norunt, ex tot assumptis in tabula centris, quot stationes in territorio elegerunt, intuentur tandem in charta expansa omnem territorii figuram, quam deinde oporteat scalæ beneficio mensurare.

In musæo nostro academico ejuscemodî mensula præclare elaborata existit, quæ pluribus operationibus Gæodæticis accuratissime deservit.

§. 114. **M**ensulæ huic Geometricæ necessarii porro accedere debent *bacilli*, 3 aut 4 pedes longi, ferreaque cuspide muniti, quo facilius queant in terram adigi; item *ve-xilla* bacillis interponenda, & *catena ferrea*, cujus articuli unum pedem sint longi; funes quippe pro camporum dimensione sine errorum discrimine non adhibentur, tum quod elastici vehementer sint, & tendantur: tum quod humoribus imbuti contrahantur; nisi forte prius oleo, & cera valide imprægnentur; quamvis ne tum quidem catenæ adæquent apud Geometras usum.

§. 115.

§. 115. *V*laterium est instrumentum, tabula circulari multifariam divisa, & pluribus rotis dentatis constans. Cum hoc instrumentum rotæ curruli, aut pedi hominis vel equi proficiscentis beneficio fili illigatur, monstrabit repetitis tensionibus numerum circumvolutionum rotæ, aut passuum factorum, ita ut, habita ratione peripheriæ in rotis, aut longitudinis in passibus, liceat scire, quotnam milliaria quispiam in curru concluso confidens sit emensus. Hoc instrumentum fuse describit *Levinus Hulsius* in tractatu *de mechanicis instrumentis*.

§. 116. **H**Uc quoque referri debet *Circinus Proportionalis*, qui *Tab. III. Fig. 67.* est circinus planus, triplici linea sic distinctus in utroque crure, ut lineæ illæ in centro D concurrant; Extrema linea DA est *Arithmetica*, media DB est *Geometrica*, intima DC est *Polygonalis*. Et hæc quidem tres lineæ, *Arithmetica* nimirum, *Geometrica*, & *Polygonalis* in uno plano *circini proportionalis* latere describuntur; in altero latere aliæ tres describuntur lineæ ad alios, & alios in Geometria usus: nempe linea *chordarum*; linea *cuborum* seu *solidorum*; & linea *metallica*. Hac posteriori linea frequenter Pyrotechnæ utuntur, ut globorum æneorum aut ferreorum gravitatem metiantur. Hic quoque circinus multiplicem usum in Geometria præstat, ut in sequentibus patecet.

§. 117. **A**liis Geodæticis instrumentis enumerandis veluti *Pantometro*, *Groma* &c. non immorabor, tum quod vix usitata sint, tum quod utentium scopo non sat accurate respondeant. Igitur ad *Problemata Geodætica* est transeundum. Triplicis autem ordinis *Problemata* occurrent; ea nimirum, quæ *Planimetriam* seu mensionem locorum planorum spectant: tum quæ *Altimetriam*, ac denique quæ *Bathymetriam* seu profunditatum dimensiones respiciunt.

PROPOSITIO I.

§. 118. *Angulum seu in charta, seu in campo metiri.*

U

Si

Tab. III. Si angulum in charta metiri velis, pone centrum A *Transportatorii* ad verticem anguli, quem metiri cupis: tum lateri ejusdem anguli applica diametrum *Transportatorii* CA, & numeros gradus interceptos v. g. ad B.

Tab. III. In campo autem pone *Astrolabium*, super fulcro hujus centrum B collocetur perpendiculariter super vertice anguli mensurandi, ita ut BC examissim respondeat uni lateri illius anguli, quod fit ope dioptrarum A C; tum regula mobilis E D ea ratione versus alterum crus anguli dirigitur, ut per dioptras baculum defixum valeas intueri. Atque inde gradus anguli in peripheria astrolabii numerantur.

PROPOSITIO II.

§. 119. *Invenire distantiam duorum locorum AB ab invicem, si transitus per medium sit aliquo flumine, aut monte interclusus.*

Tab. III. In puncto arbitrario, ex quo utrumque locum accedere liceat, collocetur mensula Prætoriana, & defixo in ea puncto D dirigitur lineale dioptrarum beneficio, ex D in A, duciturque in charta super mensulam extensa juxta hanc directionem linea DM. Mox, converso circa punctum lineali, fit directio per dioptras ex D in B, fitque altera linea DN in charta; quæ utraque linea concurrens exhibet accurate angulum AD B. Jam mensuretur utraque linea DA, & DB, sitque prior

DA 137⁰ 5', altera DB 146⁰ 2' longa; hæ longitudines juxta scalam transferantur in chartam DM, & DN, atque ex M ducatur recta in N, hæc recta per scalam priorem mensurata dabit longitudinem tertiæ lineæ, seu distantiam locorum AB:

187⁰ 5'.

Nam MDN. MN :: ADB. AB.

§. 120. **O**pe astrolabii distantia inaccessa AB sic reperitur: in delecto puncto D astrolabium constituitur sic, ut

ut centrum astrolabii cum puncto D examuffim concordet; tum dioptræ in linea immobili seu diametro astrolabii positæ dirigantur in B; linea autem mobilis in A; Gradus itaque astrolabii magnitudinem anguli ADB notabunt v. g. $83^{\circ} 18'$. Porro spatium ex D in B mensuretur, sitque $146^{\circ} 2'$; spatium autem ex D in A $137^{\circ} 5'$. Inde postea Geometra domum reversus angulum ADB = $83^{\circ} 18'$ in charta describit ope transportatorii, uti & spatia DB, & DA juxta scalam protensa. Denique ex A in B linea recta ducta, atque juxta scalam eandem mensurata, notat longitudinem spatii inter A, & B interjacentis, nempe $187^{\circ} 5'$.

§. 121. **A**Lio præterea modo invenitur distantia AB, bacillos adhibendo. Defigatur baculus in arbitrario puncto D in terram: tum adhibita catena mensurentur lineæ DA, & DB; DA = $137^{\circ} 5'$, & DB = $146^{\circ} 2'$. Quarta pars lineæ DA = $34^{\circ} 3'$ ducatur ex D in G; uti & quarta pars lineæ DB = $36^{\circ} 5'$ ducatur ex D in H. Ex G ducatur recta in H, hæc mensurata continebit $61^{\circ} 8'$. Rursum $61^{\circ} 8' \times 4 = 187^{\circ} 5'$. Erit itaque lineæ AB $187^{\circ} 5'$.

§. 122. **Q**UOD si lineam GH, ob exundantem aquam aut aliquem alterum obicem, ducere non liceat, continetur recta AD beneficio bacillorum versus E (§. 12.) & recta DB versus F. Quarta pars lineæ DA = $34^{\circ} 3'$ transferatur ex D in E, & quarta pars lineæ DB = $36^{\circ} 5'$ ex D in F. li-

nea FE mensurata, & per 4 multiplicata exhibebit 187 perticas 5 pedes, distantiam nimirum AB.

§. 123. **N**isi quis forte malit totam lineam AD recto ordine ex D in T continuare; lineam vero BD in S. mensuretur spatium ST, & erit æquale spatio in accesso AB.

PROPOSITIO III.

Tab. IV. §. 124. Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus tantummodo nempe A adiri possit.

Triplici modo potissimum fit. Primo ope mensulæ: loca hanc in arbitrario loco nempe in C. & dioptrarum adminiculo delineatur angulus ACB in charta, super mensulam

extensa; Mox adhibita catena mensuretur linea CA v. g. 27 2, & juxta scalam in chartam mensura hujus lineæ transferatur. Tum collocetur mensula in A, concilieturque examuffim linea AC super chartam descripta cum linea territorii AC. ac tandem convertatur lineale in B, & notetur super chartam angulus BAC. Denique ubi lineam ex B in C duxeris, & linea AB cum CB in B concurrerit, ibi punctum defige. Mensuretur itaque per scalam spatium AB in charta delineatum juxta scalam, & prodibuat 33 perticæ.

§. 125. **C**onsimilis fere est operatio, dum mensulæ loco astrolabium adhibetur; Explorantur siquidem per astrolabium tum in C tum in A positum anguli BCA, & CAB, angulus BCA = 92 20', angulus BAC = 32 26'. Interponiturque linea CA = 27 2, juxta scalam mensurata. Ubi demum, & lineam AB in charta resultantem beneficio scalæ mensuraveris, deprehendes longitudinem AB 33.

§. 126. **A**lia paulisper est operatio, cum sine mensula, & astrolabio bacilli duntaxat ad resolvendum hoc problema adhibentur: Desige itaque bacillum in loco arbitrario C; alterum bacillum D etiam in loco arbitrario desige, hac tamen ratione, ut cum C, & B lineam rectam continuet: Tum adhibita catena mensura distantiam AD, hancque ubi cognoveris, desige in medio illius nempe in G tertium bacillum. Rursus mensura intercapedinem inter G, & C, hancque ipsam intercapedinem inter C, & G transfer recto ordine ex G in E. Porro procede in F, & inquire locum, qui non tantum cum EA, sed etiam cum GB lineam rectam efformet, atque in hoc loco F ultimum bacillum desige. Linea $FD = AB$, eamque ubi mensuraveris, reperies locum A 33 perticis esse sejunctum a B. Hæc operandi ratio eo jucundior est, quod sola catena, & bacillis peragatur. Quæ quidem omnia in quantitatum proportionem fundantur; sicut enim AB ad triangulum AGB; ita FD ad simile; & æquale triangulum FGD.

PROPOSITIO IV.

§. 127. *D*istantiam duorum locorum AB metiri, quorum neutrum accedere possis. Tab. IV.
Fig. 70.

Triplici potissimum modo hoc similiaque problémata resolvuntur; aut nempe per mensulam, aut per astrolabium, aut per solos bacillos.

Mensulam igitur adhibiturus, e regione duorum locorum inaccessorum A, & B duo puncta deligat arbitraria v. g. C, D. constitutaque perpendiculariter mensula super puncto C, ope linealis angulos ACB, & ACD in charta describat super mensulam expansa; inde adhibita catena mensuret lineam CD v. g.

488, eamque juxta scalæ proportionem in charta exprimat. Tum mensulam ex C in D transferat, rursusque in eadem charta angulos CDA, & CDB delineet. Denique cum men-

furata fuerit per scalam linea AB, deprehendetur distantia duorum locorum inaccessorum esse 70 perticarum.

§. 128. **E**Adem fere est operatio affumenti astrolabium; Nam in arbitrario puncto C angulorum ACD, & BCD gradus metitur, quorum prior nempe ACD = 107; alter BCD = 40. Ex puncto D quoque metiatur gradus anguli CDB = 97, & anguli CDA = 34, tandem lineam CD menseuret 488. Domum reversus Geometra primum lineam CD juxta scalam in charta describat; tum ex C ope, transportatorii describat angulum 40 nempe BCD, itemque angulum 107 nempe ACD. Ex puncto D describat pariter angulum 34 CDA, itemque angulum 97 CDB. Puncta, in quibus DB, & CB itemque CA, & DA convenient, id est A, & B notet, atque interjectum inter A, & B spatium, ducta linea, juxta scalam menseuret; deprehendetque distantiam 70 perticarum.

Tab. IV. §. 129. **D**Enique duo hæc inaccessa loca A, & B certa quapiam mensura a se invicem distare deprehenduntur usu solorum bacillorum, & catenæ mensoriæ. Itaque bacillis, & catena instructus progredere in Campum, & delige punctum C, quod cum duobus locis inaccessis ferme angulum rectum efficiat, in C bacillum defige; alterum bacillum defige in arbitrario puncto D, quod tamen cum A, & C rectam continuet. Tum assume arbitrarium punctum E, quod ferme perpendiculare sit ipsi C. Ex C duc rectam in E, eamque eadem longitudine continuabis in G, itemque ex D per E prosequere rectam in F, ita ut EF = DE: Quomodo autem rectæ lineæ bacillorum ope formentur, dictum est (§. 12.) Porro procede versus M ad illud nempe punctum, ex quo
recta

recta linea tum per E in A, tum per per G in F prospicere queas, atque in hoc puncto M pariter hacillum fige. Transi deinde versus H, atque in eo rursus loco arbitrario bacillum fige, qui cum G, & B rectam constituat; Ex H per G protende lineam rectam K, ita ut $HE = EK$. Denique in L progredere ad illud punctum, ex quo per C in K, & simul per E in B recta linea excurrat. Defixo itaque in hoc puncto L bacillo mensura distantiam LM, & habebis simul distantiam locorum inaccessorum AB; Nam Trapezium $ACGB =$ Trapezio $MGCL$, & triangulum $EMF = EAD$; item $KLE = HBE$: Igitur etiam $LEM = BEA$, adeoque $LM = AB$.

SCHOLIUM.

§. 130. **C**um quidem & acus magnetica instrumentum goniometricum sit (§. 112); omisimus tamen Problemata mox præcedentia illius ope resolvere, propterea quod in majoribus distantiiis, citra erroris offensam non adhibeatur; securior aliquanto illius usus esse potest in distantiiis minoribus mensurandis, velut sequens problema ostendit.

PROPOSITIO V.

§. 131. *Opus acus magnetica prati cuiuspiam, aut agri peripheriam de-Tab. IV.
lineare. Fig. 72-*

Sit periphæria prati A, B, C, D, E, F, G, H. delineanda; Pone itaque acum magneticam, lineali, & dioptris instructam, atque super stativo collocatam in A, mox converte lineale dioptrarum beneficio in B, ac adscribe in charta: quotumnam acus magnetica gradum indicaverit v. g. 101. tum ope catenæ mensuretur linea AB, quæ contineat v. g. 27 3. Transi ad locum B, directoque lineali in C deprehendes acum ad gradum 12 collimare, hunc gradum adscribe, rursusque lineam

lineam BC catena metire v. g. $14 \overset{\circ}{3}$. In loco C deprehendes acum, cum lineale in D directum fuerit, v. g. ad 101 gradum consistere, lineam vero $CD = 16 \overset{\circ}{6}$. Ex D in E prospicienti declinabit acus v. g. ad 35 gradum, linea autem $DE = 9 \overset{\circ}{0}$. Ex E in F, monstrabit acus v. g. 301 gradum, & linea $EF = 34 \overset{\circ}{5}$. Ex F in G notabitur ab acu v. g. gradus 285; ipsa vero linea $FG = 13 \overset{\circ}{9}$. Ex G in H notabitur ab acu gradus 234, & linea ipsa $GH = 16 \overset{\circ}{5}$. Denique ex H in A prospectans deprehendes ab acu notari gradum 165, longam vero esse lineam $HA 24 \overset{\circ}{3}$. His adeo peractis, cum domum reversus fueris, chartam expande, atque juxta priores in campo declinationes acus magneticæ angulos describe, interposita cuivis angulo laterum longitudine juxta scalæ proportionem. Et sic habebis delineatam in charta spatii desiderati figuram.

SCHOLIUM I.

§. 132. **M**Ox dictum problema etiam adhibitione mensulæ Prætorianæ resolvi potest: Mensula quippe in singulis punctis A, B, C, D, E, F, G, H successive ponitur, & ope linealis atque dioptrarum anguli ABC, BCD, CDE &c. delineantur, quibus suarum semper linearum longitudines, juxta scalam digestæ, interferuntur.

SCHOLIUM II.

§. 133. **A**Lia adhucdum ratione area hæc prati irregularis delineari potest, quin externa latera AB, BC &c. mensurentur: Mensula in loco arbitrario intra ipsam aream v. g. in O constituitur, postquam nimirum in singulis
prati

prati angulis A, B, C, D &c. bacilli defixi fuerunt ; in medium chartæ supra mensulam extensæ acus O infigitur ; atque ex hoc centro O beneficio linealis anguli AOB, BOC, COD, DOE, EOF &c. in charta delineantur. Mox mensurentur catena singula horum triangulorum latera in prato, nempe OA, OB, OC &c. hæque mensuræ juxta scalam in lineas super charta descriptas transferantur. Ubi extremitates harum linearum nempe A, B, C &c. lineis rectis copula-veris, prodibit desiderata areæ figura. Idem ipsum impetrabitur ab eo, qui loco mensulæ assumens astrolabium, ex centro O angulos AOB, BOC &c. determinaverit, deinde in chartam ope transportatorii deferendos cum interpositis juxta scalam lateribus OA, OB &c.

SCHOLIUM III.

§. 134. **Q**Uod si cui libitum sit loco catenæ in mensurando *Tab. IV.* aut hexapedam, seu orgyam, is adcurare debet, ut ne perticam elevatam teneat, & extremitatibus A, & B duntaxat solum contingat ; hoc quippe errore admisso pertica multo brevior redditur, & quæ alioquin longa est AE, sic mensurando tantum extenditur ab A in D. *Fig. 73.*

PROPOSITIO VI.

§. 135. **L**atitudinem fluvii, aut piscina invenire. *Tab. IV.*
 E regione objecti A trans flumen positi defigatur baculus in ripa E, continueturque hæc linea recta usque in B. Puncto E ope astrolabii, aut alterius instrumenti goniometrici adjunge perpendicularem lineam ad arbitrariam distantiam v.g. usque in C. Lineam hanc perpendicularem CE continua usque in D recto ordine ; ita ut $CE = ED$. Porro ope mensulæ, aut astrolabii desume angulum ECA, ac hunc eundem angulum transfer in D, ut $ECA = EDB$. Itaque ubi lineæ EB, & DB concurrent, nempe in B, ibi
 X bacu-

baculum defige, mensura distantiam EB, & habebis latitudinem fluvii AE. Nam uterque angulus CEA, & DEB est rectus, angulus autem ECA = angulo EDB *per hypothesim*, & latus etiam CE = lateri ED. Igitur etiam EB = AE.

PROPOSITIO VII.

Tab. IV. §. 136. *Torrentem, aut fluvium sinuoso alveo natantem, in charta delineare.*
 Fig. 75.

Et brevissime, & commodissime in consimilibus delineationibus præ aliis instrumentis mensula adhibetur; propterea, quod in mensula multiplices, variantesque anguli ac ductus statim ipso objectorum intuitu delineentur; quos angulos plurimos vix sine perturbatione in astrolabio, aut acu magnetica juxta gradus Geometra notaret, ac tandem domum reversus ope transportatorii, aut acus magneticæ delinearet in charta. Itaque cum dicta mensula accede ad A, & lineam AB in charta exprime; mensura deinde per catenam spatium AB, uti & transversales lineas, usque ad ripam fluminis excurrentes, easque ad scalam exactas in chartam transfer. Designa deinde lineam BK, eamque pariter cum suis transversalibus juxta scalam in charta exprime. Ex K delineabis KL, quam lineam etiam mensurabis, & scalæ beneficio in chartam transferes. Ex eodem puncto K duc lineas in charta versus objecta arbitraria v. g. O, M, N, atque ubi in mensula ex puncto L in eadem objecta M, N, O lineas duxeris, patefcet distantia horum objectorum, aut bacillorum in M, N, O infixorum. (§. 124). sic porro progredieris ad arbitrariam fluminis protensionem. Tandem ad aliud fluminis latus mensurandum transiturus, delineam angulum LDE in charta, juxta scalam mensuratum. Tum posita mensula in E designa lineas EP, PQ &c. cum suis transversalibus; quæ omnes lineæ examissim mensuratæ, atque ad scalam exactæ, sinuosum fluvii decursum in charta exhibebunt.

COROLLARIUM I.

§. 137. **N**emo jam usque adeo inops consilii fuerit, qui ex allatis problematis non deducatur in cognitionem, ac praxim, ope præsertim mensulæ Prætorianæ, territoria integra, & pagos mensurandi, delineandique; quamvis mensuris, & illis præcipue, qui nullo usu condocesacti fuerint, nonnunquam σφάλματα obrepant: quas aberrationes cautissime discavere docet *Clariss. Marinonius de Re Ichnographica* Cap. V. Quem pro accuranda praxi Geometrica utilissime consulueris.

COROLLARIUM II.

§. 138. **V**erum quoniam in Geodæticis descriptionibus non plana ubique superficies, sed etiam collosa, & ab horizonte vel in ascensum, vel in descensum declinans reperitur; Hinc necessum quoque est, modum suppeditare ejusmodi superficies mensurandi. Cum elevatio, aut depressio non excedit 5 pedes ad distantiam 5 perticarum, tunc idonee adhibetur semicatena, *Tab. IV. Fig. 76.* cujus altera extremitas alligatur culmini B perticæ AB verticaliter fixæ, altera vero extremitas attinetur in puncto C; itaque, ubi adhibita libella D deprehenderit, a catena horizontalem situm teneri, scies, collem AC spatio AB in ascensum declinare. Quod si collis ex C porro ascendat, pone in C perticam, & adhibita catena ulteriorem hunc ascensum metire modo mox infinuato.

§. 139. **Q**uod si autem collis in præcipitium divergat, *Tab. IV. Fig. 77.* tum duæ perticæ adhibeantur, quarum AB in terram verticaliter figatur; altera CD horizontaliter juxta libellam *Wasser-Wage* directæ sit, sitque 18 etiam vel 20 pedes longa. Pertica CD normali loculamento MN conjuncta est ad angulum rectum perticæ AB per quod loculamentum MN pertica AB vel versus A deorsum, vel versus B sursum pro ascendentis montis exigentia extrahi possit, ac tandem cuspi-

cuspide ferrea in terram defigi, ut nempe pro magnitudine spatii AM altitudo montis ST deprehendatur.

§. 140. **H**uc quoque pertinet commemorare *Nivellationem* vulgo *Wasser-Wägen*, quæ ars est determinandi: quantonam discrimine aquæ fluentes per diversa continuo territoria jam terræ centro propiores sint, jam remotiores. Sit itaque

PROPOSITIO VIII.

§. 141. *Fluvium* AB *nivellare*.

Tab. IV.

Fig. 78.

Assumatur libella vulgo *Wasser-Wäge* C , hæc que in ripa A in pertica quadam constituitur horizontaliter; Sit autem libella illa dioptris suis instructa. Jam ad arbitriam distantiam v. g. in D altera pertica perpendicularis constituitur, cui superne in E affixum sit album folium chartæ, & deorsum, & sursum mobile. Itaque ubi in libella C per dioptras versus D prospexeris, atque summitatem albi folii E deprehenderis, subsiste; mensura altitudinem AC , uti & altitudinem DE , atque quo spatio altitudo DE altitudinem AC superaverit, illud erit discrimen fluvii AB , versus terræ centrum descendens. Rursus eadem ratione libellam ponendo in D collima in F , tum successive in G . H . &c.

SCHOLIUM I.

§. 142. **U**T *nivellatio*, qua licet, exactissime peragatur, juverit eandem repetere, & postquam aquæ descensus ex A in B deprehensus est, iterum *NIVELLATIONEM* aquæ ex B in A ascendens ordiri; Itaque, ex correspondente aquæ tum ascendens, tum descendens calculo, rite factam fuisse *nivellationem* innotescet. Neque vero neglectim aut obiter *nivellationes* exerceri debent, utpote quarum beneficio altitudines locorum innotescant; innotescat etiam: quænam aquæ, aut torrentes, aut scaturigines ad impellendas diversorum opificiorum moles dirigi queant, quarum denique subsidio agri paludinosi abactis aquis in fertile possint solum commutari. Quæ certo non mediocria Republicæ sunt emolumenta.

SCHO-

SCHOLIUM II.

§. 143. **L**inea horizontalis, quæ in *nivellatione* beneficio libellæ, & dioptrarum reperitur, non est mathematicæ horizontalis, cum terra sphericæ, aut ellipticæ sit figuræ, a cujus superficie linea recta eo magis abscedit, in altum declinando, quo recta illa linea fuerit longior; Imo si talis horizontalis linea recta AB longissime continuaretur, v. g. ad distantiam 900 miliarium, atque ex B perpendicularis dimitteretur in C, illa perpendicularis BC ne quidem superficiem terræ D contingeret, cum terræ semidiametrus ED ultra 900 miliaria non protendatur, quamvis ad minorem distantiam declinatio horizontalis lineæ insensibilis sit. Igitur vera horizontalis linea est ACFG, quæ circa tellurem ducta, æqualem semper distantiam a centro servat, quæ certe ex infinitis rectis lineis constitui debet (§340). Ut vero Nivellatoribus definiamus, ad quamnam distantiam linea horizontalis sensibilibiter declinet, accipe sequentem tabulam.

| | digiti | | perticæ | digiti | |
|---------------|-------------------|---|---------|--------------------|-------|
| Ad distantiam | 197 | — | 1 | | |
| perticarum | 280 | — | 2 | 835 | — 18 |
| | 341 | — | 3 | 858 $\frac{1}{2}$ | — 19 |
| | 394 | — | 4 | 880 | — 20 |
| | 440 | — | 5 | 901 | — 21 |
| | 482 | — | 6 | 922 | — 22 |
| | 521 | — | 7 | 943 $\frac{1}{2}$ | — 23 |
| | 557 | — | 8 | 964 | — 24 |
| | 590 | — | 9 | 984 | — 25 |
| | 621 | — | 10 | 1003 | — 26 |
| | 652 | — | 11 | 1022 | — 27 |
| | 681 $\frac{1}{2}$ | — | 12 | 1041 | — 28 |
| | 709 | — | 13 | 1059 | — 29 |
| | 736 | — | 14 | 1077 $\frac{1}{2}$ | — 30 |
| | 762 | — | 15 | 1095 | — 31 |
| | 787 | — | 16 | 1113 | — 32 |
| | 811 | — | 17 | 1130 | — 33. |

S C H O L I U M III.

§. 144. **N**unc causam reddere oportet : quarenam omnes delineationes, & mensuræ Geodæticiæ etiam in locis montosis fieri debeant secundum planam territorii superficiem, non vero juxta superficiem montium? cum tamen spatium, quod ascendentium collium superficiebus concluditur, majus sit, quam spatium illud, quod plana montium completitur basis; Quia nimirum majora corpora, quæ etiam sub terræ superficiem descendunt veluti arbores, & ædificia, non plura possunt in colle, quam in collis basi constitui. Quod quidem facile persuadebitur illi, qui attenderit, ejuscemodi corpora non se habere ut radios e superficie collis tanquam e suo centro undequaque prodeutes, sed omnes arbores, omnia ædificia perpendiculariter versus terræ centrum propendere; Itaque si basis alicujus montis nequit plures quam 20 arbores aut domos in se recipere, neque plures poterunt in montis illius superficie collocari, eo quod omnes situm teneant versus terræ centrum perpendicularem: quamvis minora corpora, & quæ non semper perpendiculariter insunt basi, veluti gramina, in majori copia possint per collis superficiem excrescere, quam in angustiiori baseos spatio excrevisent.

Jam ad altimetriæ problemata procedamus.

PROPOSITIO IX.

Tab. IV. §. 145.

Fig. 80.

Alitudinem turris, cujus basim accedere liceat, metiri. Sit altitudo turris CA mensuranda; Itaque ex arbitrario loco D ope astrolabii; vel etiam mensuræ defume angulum BEA: tum adhibita catena mensura lineam DC parallelam ipsi EB; transfer longitudinem lineæ CB juxta scalam in chartam; ex B duc perpendicularem sursum in A (§. 24.) turris quippe supponitur esse perpendicularis solo; Ipsi puncto E adjuuge inventum angulum BEA, & ad illius exigentiam duc pariter lineam versus A. Ex puncto A, in quod nem-

nempe BA , & EA concurrerunt, metire juxta scalam usque in B , & adjecta altitudine CB seu DE habebis petitam turris altitudinem.

S C H O L I U M.

§. 146. **Q**uoniam vertex turris A medium est turris MN , non fat fuerit ex D in S duntaxat mensurare, sed usque in C ; alias quippe S , & A non formarent lineam perpendicularem nec angulum rectum DCA .

§. 147. *Alio modo, ope speculi, dictam altitudinem CA metiri.* Tab. IV.
Fig. 81.
Speculum horizontali situ reponere in R , ut nempe recta consistens apicem turris A in eo intuearis; Tum mensura spatium inter punctum R , & plantas L interpositum, item altitudinem ex L ad oculum K , denique etiam spatium RC . Porro has lineas CR , RL , itemque perpendicularem LK juxta scalam transfer in chartam. Ex K duc rectam in R ; hæc recta dabit angulum reflexionis LRK : Quia vero angulus reflexionis est æqualis angulo incidentiæ (§. 64.) Ideo adhibito transportatorio fac angulum incidentiæ CRA , æqualem ipsi LRK . Ubi linea RA lineam rectam perpendicularem CA secuerit in puncto A , ibi punctum defige, ac metire juxta scalam lineam CA , habebisque desideratam turris altitudinem.

P R O P O S I T I O X.

§. 148. **M**etiri ædificii altitudinem BA ope bacilli infixi DC . Tab. IV.
Fig. 82.
Cillo CD perpendiculariter in terram defixo, eo situ te humi prosterne, ut supinus oculo E per verticem baculi C summitatem ædificii A conspiciere queas. Tum metire lineas ED , & DB , itemque perpendicularem DC , easque juxta scalam in charta describe. Ex E per verticem C duc rectam ECA , ac ubi hæc recta perpendicularem BA secuerit in puncto A , ibi punctum infige. Mensurato deinde juxta scalam spatium BA , habebitur altitudo quæsitæ AB ædificii.

§. 149.

§. 14. **N**am BA est quarta proportionalis (§. 40.) Nam sicut ED. DC : : EB. BA. Ideoque hoc problema etiam resolvi potest per regulam proportionis (§. 79. *Aritb.*) dicendo v. g. spatium ED = 4 dat altitudinem DC = 3, quantum altitudinem dabit spatium EB = 12 ?

PROPOSITIO XI.

Tab. V. §. 150. Altitudinem arboris AB ex sola umbra solis invenire.

Fig. 83.

Defige primum bacillum DE perpendiculariter in E, tum mensura BC, & EF, quæ duæ sunt longitudines umbræ sparsæ; mensura item longitudinem bacilli ED, hasque lineas, ad scalam exactas, transfer in chartam; deinde duc rectam DF, formabit hæc angulum EFD umbræ cadentis; quia autem angulus umbræ a bacillo protensæ æqualis est angulo umbræ ab arbore procedentis (§. 86.) igitur adhibito transportatorio ex puncto C forma angulum BCA = ipsi EFD. atque ex puncto A, in quo linea CA, & perpendicularis BA concurrunt, metire lineam AB juxta scalam, habebisque quæsitam arboris ex umbra altitudinem.

Nihil quoque hic aliud intercedit, quam proportio. Nam EF. ED : : CB. BA, sub eadem nimirum anguli extensione.

PROPOSITIO XII.

Tab. V. §. 151. Altitudinem aedificii inaccessi BA, cujus tamen pedem horizontaliter situm videre possis, metiri.

Fig. 84.

Figue duos bacillos in C, & D; atque ex C primo ope astrolabii gradus anguli NMA designa; tum, & gradus anguli BCD. Mox translato astrolabio in D metire gradus anguli BDC. Mensura deinde ope catenæ lineam DC, eamque juxta scalam geometricam chartæ inscriptam ita ordina, ut ope transportatorii ex utroque angulo C, & D, juxta gradus inven-

ventos, lineæ extendantur in B: secabunt hæ se invicem in B, atque linea B C per scalam mensurata exhibebit distantiam CB (§. 125.) Habita hac distantia CB, duc perpendicularem ex B in A, ex M vero juxta exigentiam anguli inventi NMA duc rectam in A; secabunt se hæ lineæ rectæ in A, & AB per scalam mensurata (adjecta nimirum altitudine stantis astrolabii CM (§. 145.) dabit ædificii BA altitudinem.

PROPOSITIO XIII.

§. 152. *Altitudinem turris MA invenire, cujus perpendicularem lineam Tab. V. in horizontalem descendere, ob jugorum obstacula, ne videre Fig. 85. quidem possit.*

Pone primum in G astrolabium E, & metire angulum horizontalem DEA, tum in propiore ad turrim distantia F pone astrolabium, & desume denuo horizontalem angulum DCA. Porro metire distantiam GF, eamque juxta scalam mensuratam in charta deponere, ut E C. Puncto E adjuge ope transportatorii inventum angulum DEA; puncto autem C angulum DCA; lineas CA, & EA eousque continua, donec in A concurrant. Ex A demitte perpendicularem AD in horizontalem DC. Mensura itaque lineam perpendicularem AD, & adjuncta astrolabii altitudine GE vel MD habebis integram altitudinem MA turris inaccessæ.

PROPOSITIO XIV.

§. 153. *EX fenestra A ædificii aut turris altitudinem DB invenire, cu- Tab. V. jus tam per, quam summitas aspectui sit exposita. Fig. 86.*

Ex fenestra A ope astrolabii desume angulum CAB. Mox inverso astrolabio desume angulum DAC, deinde funiculo ex fenestra dimisso mensura profunditatem AE. Hanc lineam AE juxta scalam delineabis in charta, eique tanquam perpendiculari alteram lineam horizontalem ED substernes. Jam ex
 Y
 pun-

puncto A describe angulum inventum DAC ope transportatorii; ex altera superiori parte describe alterum inventum angulum CAB. Quia AC parallela ipsi ED *per hypotesin*, & AE parallela ipsi CD, igitur AD erit diagonalis. Igitur ex puncto D, ubi nempe AD secat horizontalem ED, erige perpendicularem DB, quæ lineam AB in puncto B fecet. Quod si itaque lineam DB per scalam mensuraveris, habebis quæsitam arboris DB altitudinem.

COROLLARIUM.

§. 154. **C**onsimili ratione deprehendere licet latitudinem platearum ex fenestra. Sit v. g. latitudo plateæ ED. Igitur habito angulo EAD, & angulo recto AED cum longitudine lineæ AE, habebitur etiam longitudo lineæ ED (§. 124.) id est latitudo plateæ ED.

Tandem juvabit nonnihil de Bathymetria seu profunditatum dimensione afferre.

PROPOSITIO XV.

Tab. V. Fig. 87. §. 155. **P**rofunditatem putei AB, aqua carentis, invenire. Metire primum putei diametrum CD; tum astrolabio in D constituto, quære gradus anguli EDB. Longitudinem lineæ CD juxta scalam in charta delineata, atque ex utroque puncto C, & D demitte perpendicularem CB, & DE; Ex D porro demitte angulum EDB prius inventum; Quod si a puncto B, in quo linea DB perpendicularem BA scindit, juxta scalam mensuraveris lineam BC, habebis desideratam putei profunditatem.

SCHOLIUM.

§. 156. **G**eometria quoque *subterranea*, quæ est ars metiendi fodinas, Germanice *Mark- & Scheid- Kunst*, huc pertinet;

tinet; cujus præcipua instrumenta, & methodum vel a limine necesse est salutare; Instrumenta igitur, quibus in praxi Geometriæ subterraneæ passim utimur, præcipue sunt sequentia: Compaffus, libella, & gonioidictes.

§. 157. *Compaffus*, seu acus magnetica, passim est pensilis, *Tab. V. Fig. 88.* cujus capsu'a ultra duos, & medium, vel tres digitos in diametro non complectitur; quamvis & non raro compaffum horizontaliter jacentem operationibus adhibeant. Circulo hujus compaffi inscriptæ sunt 24 horæ, horæ autem singulæ rursus in 8 partes dividuntur; ita ut quadrans 48, semicirculus 96, & totus circulus 192 partes comprehendat. Quod autem fossores, rejecta usitatissima circuli in 360 partes divisione, hanc assumpserint, causa eos induxisse videtur, quod in angustæ circuli 3 digitorum peripheria distinctius 192 partes, quam 360 ad lumen præcipue lampadum in cryptis subterraneis dispici queant. Cum hoc compaffo, ex uncis C D suspenso solent plagas mundi infra terram explorare; nisi forte fodina ferri acus magneticæ directionem interturbet; tunc quippe fossores adhibent alium circulum horarium, cujus descriptionem vide apud *Voigtelium*, & *Weidlerum*.

§. 158. *Libella* fossorum est semicirculus, ex tenui lamella paratus, *Tab. V. Fig. 89.* cujus uterque quadrans, usitato more in 90 gradus dispescitur, pondus ex centro S appensum habet: atque hoc instrumento, in uncis A, & B appenso, exploratur linea horizontalis a fossoribus, aut obliquitas ad horizontem pro ratione cryptarum aut ascendentium, aut cadentium.

§. 159. *Gonioidictes* est regula lignea, unius circiter pedis, dioptris instructa, quæ imposita bacillo, & vel acu magnetica, vel libella instructa, inclinationes ad horizontem, aut directionem ad mundi plagas definit. Itaque Ichnographiam ferri fodinarum paraturus, profunditatem, & accessum cryptæ ab ingressu funiculo metiatur, variam procedentis cryptæ inclinationem horizontalem exploret libella, va-

riam denique declinationem ad plagas mundi compassus exhibebit. Habita jam ejuscemodi fodinarum dimensione, licebit in externa superficie loca cryptæ, sub terra procedentis determinare, ut nempe juxta ichnographiam directionum anguli ope instrumenti goniodiæctici determinantur, una cum lineis horizontalibus, quemadmodum intra cryptam subterraneam sunt inventæ. Plura qui de Geometria subterraneâ; arte pulchra, & principum æraria suffulciente, scire desiderat, adeat *Augustum Beyer*, & *Voigtelium*, qui eam solide juxta ac copiose pertractarunt.

§. 160. **Q**uamvis vero non omnia allegatorum Problematum veluti (§. 148, & 153.) sic comparata sint, ut mathematicum rigorem sustineant; malui ea tamen in exercitio Gæodætico exhibere; quod, & ejuscemodi propositiones in tyronum mentibus excitent quasdam proportiones ac combinationes, non omnino inutiles, quæ certo præcipuus mathematicarum disciplinarum sunt scopus.

C A P U T VI.

De Superficie, Quadrangulo, aliisque Polygonis.

DEFINITIONES.

§. 161. **S**uperficies (§. 6.) definita, alia est *recta*, cujus terminos jungunt lineæ rectæ, in longum, & latum protensæ; Alia est *curva*, quam lineæ curvæ, seu tortuosæ constituunt. Alia *convexa* A quæ est exterior a centro respectus; alia *concaua* B quæ est respectus ad centrum interior; atque prædiversa superficierum dispositione variæ enascuntur figuræ.

Tab. V. §. 162. **Q**uadratum est superficies plana, quæ angulos quatuor rectos habet, & totidem æqualia latera.

Fig. 91.

§. 163.

§. 163. *Q*uadratum oblongum, vel rectangulum est, quod habet quidem omnes angulos rectos, latera autem solummodo duo æqualia; ea nempe, quæ sibi opponuntur. Atque in hoc distinguitur a quadrato. *Tab. V. Fig. 92.*

§. 164. *R*hombus est superficies quadrata habens omnia latera æqualia, & angulos oppositos etiam æquales, non tamen rectos; sed duos eorum rectos, duos obtusos. *Tab. V. Fig. 93.*

§. 165. *R*homboides habet latera opposita duntaxat æqualia; uti & oppositos angulos æquales, non quidem rectos; sed duos acutos, duos item obtusos. Quatuor hæc enumeratæ figuræ quadrilateræ *parallelogramma* dici consueverunt, & speciatim *rectangulum*. *Tab. V. Fig. 94.*

§. 166. *T*rapezium est superficies quadrilatera, cujus nec anguli æquales sunt, neque latera æqualia. Quod si duo latera æqualia habeat, & cætera inæqualia, vocatur *Trapezoides*. *Tab. V. Fig. 95.*

§. 167. *P*entagonum est superficies quinque habens latera totidemque angulos: *Hexagonum* horum sex numerat. *Heptagonum* septem. *Octogonum* octo &c. Hæc vero omnia alia rursus *regularia* sunt, alia *irregularia*.

PROPOSITIO I.

§. 168. *Q*uacunque figura quadrilatera ABCD valet quatuor angulos rectos. *Tab. V. Fig. 95.*

Nam omne quadrilaterum valet duo triangula; per diagonalem quippe CB dividitur quadrilaterum ABCD in duo triangula ACB, & CDB (§. 169.) Atqui omne triangulum æquale est duobus angulis rectis (§. 77.) ergo & quadrilaterum ABCD æquale est quatuor rectis Q. E. D.

PROPOSITIO II.

Tab. V. §. 169. *Omne parallelogrammum CABD per lineam diagonalem CB in duo triangula prorsus equalia ABC, & DCB dividitur.*
Fig. 96.

Linea diagonalis CB in duas parallelas AB, & CD incidens facit angulos ABC, & DCB æquales (§. 66.) & quoniam etiam AC, & BD sunt parallelae, erit quoque angulus ACB = CBD (§. 66.) Porro anguli CAB, & CDB sunt anguli recti, & linea diagonalis CB est communis utrique triangulo; Igitur triangulum ABC = DCB (§. 89.) Q. E. D.

COROLLARIUM.

§. 170. *Similiter de diagonali Rhombi, & Rhomboidis est ratiocinandum.*

PROPOSITIO III.

Tab. V. §. 171. *SI in linea diagonali CB parallelogrammi ABDC punctum E deligatur, atque per E parallela ducantur FG, & HI; erunt parallelogramma FEIC, HBGE, ABCD inter se similia.*
Fig. 97.

Propter parallelas AC, HE, & CD, EG, sic se habet AB ad HB, & DB ad GB, uti CBad EB: ergo etiam AB ad HB, & FG ad EG sicut DB ad BG, & IH ad EH. Sicque de aliis lateribus discurrendum. Adeoque parallelogrammum ABDC erit simile parallelogrammo FEIC, & HBGE. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Tab. V. §. 172. *SI a parallelogrammo ABDC parallelogrammum MSONC ablatum sit, & similiter positum communem cum eo habens angulum C, hoc MONC circa eandem cum toto ABDC diametrum consistit. Eucl. VI. 26.*
Fig. 96.

COROLLARIUM II.

§. 173. **E**X quo discimus motuum compositionem æstimare. *Fig. ead.*
 Sit corpus positum in C, hoc impellatur directione CA, vi se habente ut CA; altero vero impetu moveatur simul directione CD, vi se habente ut CD; hoc corpus ob impulsuum inæqualitatem eo temporis intervallo, quo aream C A percurreret, percurreret CD; quia vero ambæ impetuum directiones conservantur, eodem tempore, quo describeret uno impetu spatium CD, aut CA, ex virium conjunctione describet spatium CB, ut post datum tempus emensum nec in A sit, nec in D, sed per diagonalem in B. De quo in *Physica*.

PROPOSITIO IV.

§. 174. *Si quatuor recta AB, CD, DF, BH fuerint proportionales, id est: si AB se habeat ad CD; sicut DF ad BH, Tab. V. Fig. 98.*
 rectangulum M ex linearum harum extremis nempe AB, & BH conflatum erit æquale rectangulo N, ex lineis mediis CD, & DF composito.

Tanto quippe BH est minor ipso DF in rectangulis M, & N; quanto AB est major ipso CD; Igitur rectangula M, & N æqualia sunt.

SCHOLIUM I.

§. 175. **I**N hoc theoremate fundatur regula arithmetica proportionis, seu trium v. g. 2. 5 : : 4. 10. $2 \times 10 = 20$; & rursus $5 \times 4 = 20$.

SCHOLIUM II.

§. 176. **I**N tribus lineis continuo Geometricè proportionalibus, cum media harum trium linearum se habeat ad duas extremas, sicut in quatuor proportionalibus duæ mediæ; sequetur, quod quadratum, ex media inter tres pro-

proportionales factum, æquale sit rectangulo facto ex prima, & tertia proportionali.

S C H O L I U M III.

- Tab. V. Fig. 99.* §. 177. **L**ignarii, vitriarii aliique artifices areas rectangulas minores facili hac praxi metiuntur. Scire necessarium sit: quot pedes quadratos areæ vitreæ X, & Z contineant? applicent mensuram pedis unius BE lateri BC; ab angulo A tendunt filum, aut regulam, usque ad summitatem pedis BE, & ultra; quæ regula occurrens lateri DC in F, ostendit rectangula X & Z tot pedes quadratos, vel pedis partes continere, quot pedes quadratos; vel pedis partes continet recta DF; nam propter angulos rectos D & B; item propter angulos BAE, DFA alternos inter parallelas AB, DF, nec non propter angulos BEA, DAF alternos inter parallelas BE, AD, erunt similia triangula EBA, ADF, & recta EB habebit eandem proportionem ad BA, quam habet recta AD ad DF. Igitur rectangulum X, & Z ex lineis AB, & AD compositum erit æquale rectangulo composito ex lineis EB, DF, & utrumque triangulum X & Z tot continebit pedes cubicos, quot pedes linea DF in longitudine continet; nam linea EB, quæ interim supponitur esse pes cubicus, multiplicata per lineam DF exhibet pedes cubicos rectanguli EB, DF, quod æquale est rectangulo AB, AD *juxta theoremata*
- Tab. V. Fig. 100.* (§. 174.) Imo si area sit ABCD, cujus utrumque latus majus sit pede EB, scire tamen cupias: quot pedes quadratos tota area contineat; applica pedem EB ad latus B, & duc rectam ex angulo A, vel ex angulo C; hæc recta ubi concurrerit cum producta DC, vel DA in F, dabit quartam proportionalem DF, ad construendum rectangulum EB \times DF, quod æquivalet rectangulo AB \times BC: ita ut quanto majus est latus EB ipso latere AB: tanto majus sit latus DF ipso latere AD.

PROPOSITIO V.

§. 178. *Si ex puncto quodam, v. g. ex E linea diagonalis CB ducantur Tab. V. duæ linea FG, & HI, lateribus parallelogrammi AB, BD Fig. 97. parallela, tunc duo parallelogramma, quæ non secantur a diagonali nempe AHFE, & EGDI sunt æqualia.*

Nam triangulum $BAC = BDC$. Item $BHE = BGE$. Itemque $EFC = EIC$ (§. 169). Diagonalis quippe omne parallelogrammum in duo triangula æqualia dividit; ergo quia parallelogramma $AHEF$, $EGDI$ cum æqualibus adjunctis magnitudinibus æqualem magnitudinem, nempe triangula BAC , BDC constituunt, erunt hæc duo parallelogramma $AHEF$, & $EGDI$ inter se æqualia. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

§. 179. *Diagonalis AD incommensurabilis est lateri quadrati ACDB. Tab. V. Nam sic se habet pars aliquota cujusdam lineæ Fig. 101.*

ad ipsam lineam, sicut se habet unitas ad numerum v. g. 1 ad 6. Et rursus sic se habet quadratum lineæ ad ipsam lineam, sicut se habet numerus quadratus v. g. 36. ad suam radicem v. g. 6. (§. 140. *Arithm.*) Et ideo cognoscimus, hunc numerum v. g. 36. esse quadratum lineæ, quia illius lineæ partes sunt 6; sequentes autem numeros 37, 38, 39, 40, 41 &c. numeros quadratos esse non posse, quia radix nulla datur his correspondens. 49 denique rursus esse numerum quadratum cujusdam lineæ, quia illius lineæ supponuntur esse 7 partes aliquotæ perfectæ; ideoque quia 36 & 49 numeri quadrati sunt linearum, habebunt se lineæ illæ, seu radices ad invicem, ut 6 & 7. Jam dicamus diagonalem esse hypotenusam, & alterum quidem quadrati latus AB esse basim, alterum BD esse cathetum. Certum est per (§. 96 & 99.) quadratum hypotenusæ esse æquale duobus quadratis catheti, & baseos; ideoque cum in quadrato $ACDB$ sit $AB = BD$; erit quadratum AD duplum AB , vel BD . Porro si quadratum AB ,
Z
vel

vel BD duplicatum adæquat quadratum AD , partes AB , vel BD nunquam poterunt conciliari cum partibus AD ; quia nempe nullus existat numerus quadratus, qui esset dimidium alterius numeri quadrati. Et quamvis verum sit, ex AB , vel BD quadratum fieri posse, posse etiam fieri quadratum ex AD ; quia tamen hoc quadratum AD habet talem numerum, ut respectu hujus non possit esse numerus quadratus quadrati AB , vel BD ; partes AB , vel BD cum partibus AD erunt omnino incommensurabiles; si igitur latus AB , vel BD non potest esse quadratum respectu diagonalis AD , neque poterit linea hæc AB , vel BD partibus aliquotis, seu radice perfecta exprimi; atque sic latera quadrati erunt incommensurabilia cum diagonali. Q. E. D.

§. 180. **H**oc theorema innititur Propositioni 47 libri I. *Euclidis*, allatæ (§. 96 & 99).

PROPOSITIO VII.

Tab. V. Fig. 102. §. 181. *Parallelogramma, super eadem bas., atque in iisdem rectis parallelis constituta, sunt equalia, ut $ABDC = CEFD$.*

Nam $AB = CD$, & $EF = CD$; & etiam $AE = BF$; atque etiam $AC = BD$, & $EC = FD$; igitur etiam triangulum $AEC = BFD$ (§. 89). Jam vero dematur ab utroque triangulo triangulum commune BOE , remanebunt duo trapezia æqualia $ABOC$, & $DOEF$. Quorum singulis si addatur commune triangulum COD , prædibunt duo parallelogramma æqualia, nempe $ABDC$, & $CEFD$. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

Fig. ead. §. 182. *Parallelogramma equalia sunt duobus triangulis ejusdem baseos, & ejusdemque altitudinis.*

† Nam parallelogramma $ABCD$, $CBFD$, uti & triangulum CFD cum inter meras parallelas contineantur AF , & CS :

CS : item AC, & FS ; habent eandem basim CD, & eandem altitudinem $AC = FS$; atqui diagonalis dividit parallelogramma in duo triangula æqualia (§. 169). Igitur parallelogramma CEF D. & CAB D æqualia sunt duobus triangulis CFD ; quoniam $CAB D = CEF D$ (§. 181).

COROLLARIUM I.

§. 183. **S**I igitur pratum aliquod, figuram habens parallelogrammi CAB D in duas sit partes æquales dividendum, ducatur diagonalis CB. Si habeat figuram trianguli CAB, ex medietate X baseos ducatur recta in A, eritque in duas partes æquales divisum ; Denique basis trianguli, aut parallelogrammi in tot partes dividatur, manente eadem altitudine, in quot æquales partes ea dividere animus fuerit. *Fig. ead.*

COROLLARIUM II.

§. 184. **O**B eandem rationem $ABC + CDE + EFG$ sunt *Tab. V.* æqualia triangulo AHG ; quia nempe triangula *Fig. 103,* $ABC + CDE + EFG$ æqualia sunt medio parallelogrammo ABHG (§. 183.) atqui AHG est medium parallelogrammi ABHG (§. 169). Igitur $ABC + CDE + EFG = AHG$. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

§. 185. *P*arallelogramma similia, quorum nempe latera AB. EF : : *Tab. V.* BD. FH. habent se in duplicata ratione baseos, & altitudinis. *Fig. 104.*

Nam cum duæ quidem rationes hic reperiantur, nempe altitudinis BA ad altitudinem FE, & baseos BD ad basim FH, componuntur tamen hæ duæ rationes in unam compositam, multiplicando terminos antecedentes inter se, nempe BA, & FE, uti etiam BD, & FH (§. 32 *Aritbm.*) atqui duæ rationes BA. FE : : BD. FH hic supponuntur esse æquales ;

igitur ratio composita ex his est duplicata rationis unius, aut alterius rationum componentium. Et hæc ratio duplicata laterum proportionalium reddit eadem latera quadrata, id est, secundum altitudinem, & basim proportionaliter multiplicata. Sit enim altitudo FE dupla altitudinis BA, & latus baseos FH duplum lateris BD; habebit se AB. EF :: 1. 2. & pariter B D. FH :: 1. 2. Jam multiplicetur duplicata hæc ratio, nempe antecedentes ducantur in antecedentes, & consequentes in consequentes $1 \times 1.$ & $2 \times 2.$ Ex antecedentibus remanebit 1. ex consequentibus autem 4. ut duplicata ratio se habeat necessario ut 1 ad 4. ergo parallelogramma similia habent se in duplicata ratione baseos, & altitudinis.

COROELARIUM.

§. 186. **H**Ac eadem ratione triangula omnia, omnes regulares figuræ circulo inscriptæ, circuli etiam ipsi, inter se sunt in duplicata ratione baseos, & altitudinis, aut suorum radiorum, ut examinanti patet.

PROPOSITIO X.

Tab. V. §. 187. *Figura quæcumque quadrilatera, circulo inscripta, ECDF.*
Fig. 105. *habet angulos oppositos CEF, & CDF æquales duobus rectis.*

Nam duo anguli CEF, & CDF ad circumferentiam vergentes, cum super tota circuli peripheria fundentur, mensurantur medio circulo (§. 246); sed semicirculus est æqualis duobus rectis (§. 234); ergo etiam duo anguli CEF, & CDF æquales sunt duobus rectis. Q. E. D.

§. 188. **E**Adem ratione prorsus discurrendum est de aliis duobus angulis ECD, & EFD.

PROPOSITIO XI.

Tab. V. §. 189. *Triangula DCG, HEF, & IBA, quæ inter quadrata, super trianguli lateribus adscripta, formantur, sunt æqualia ipsi triangulo BEC, & etiam æqualia inter se.*
Fig. 106. Pri-

Primo quidem, quod triangulum DCG, & CBE attinet: latera DC, & CG sunt æqualia lateribus CB, & CE; Circulus autem circa centrum C æquivalet quatuor angulis rectis, quorum duo sunt BCD, & ECG; igitur reliqui duo anguli nempe DCG, & BCE, intra duo æqualia latera comprehensi, etiam æquivalet duobus angulis rectis, & angulus acutus BCE erit complementum anguli obtusi DCG pro constituendo semicirculo, seu duobus angulis rectis. Igitur cum duo triangula, quorum singula habeant duo latera æqualia, & angulus intra duo æqualia latera unius trianguli interceptus sit complementum alterius anguli intra æqualia duo latera intercepti; cum, inquam, duo ejuscemodi triangula æqualia sint (§. 192), erit etiam angulus DCG = ipsi BCE. Q. E. D.

SCHOLION I.

§. 190. **E**Adem semita tenetur in demonstrando: angulos quoque HEF, ABI, esse æquales angulo BCE; Quod si autem singula tria triangula DCG, HEF, ABI æqualia sint angulo BCE, erunt etiam necessario æqualia inter se per axioma IV. §. 2.

SCHOLION II.

§. 191, **E**Adem quoque in theoria fundatur illud theorema, *Tab. V. Fig. 107.* quo demonstratur: quatuor triangula BDK, IEH, GFL, MAC, quæ inter quadrata, super Trapezii CFED lateribus descripta constituuntur, esse æqualia Trapezio CFED duplicato; Etenim $IEH = DFE$, & $ACM = CDF$ (§. 189). Igitur triangulum $IEH + ACM =$ ipsi trapezio CDEF: atqui eandem ob causam triangulum $LFG =$ triangulo CEF, & triangulum $BDK =$ triangulo CED; ergo $BDK + IEH + GFL + MAC =$ CFED duplicato.

SCHOLIION III.

Tab. V. §. 192. Fig. 108. **Q**uod autem (§. 189.) dictum est : duo triangula v. g. ABC , & BCD , quorum singula habent duo latera æqualia AB seu BD , & BC ; angulus autem CB D inter hæc duo æqualia latera in uno triangulo interceptus, est complementum alterius anguli ABC , inter æqualia illa duo latera intercepti; hoc certo ex illa theoria deducitur, quæ (§. 90, & 91.) allata est; quod nempe triangula sint æqualia, quæ super eadem basi intra duas parallelas constituuntur.

PROPOSITIO XII.

Tab. V. §. 193. Fig. 109. **S**i latus AB quadrati $ABCD$ duplicetur, ut fit AK , tunc ex duplicato latere AK constructum quadratum $AKGE$ non erit duplum prioris quadrati $ABCD$, sed quadruplum.

Fiat diagonalis EK ; hæc diagonalis duo parallelogramma fecat nempe $BCHK$, & $DCFE$, duo autem non fecat, nempe $ABCD$, & $CHGF$; sed $DCFE = ABCD$, propter æqualia latera, ut est *hypothesis*; Iterum $BKHC = ABCD$, habent quippe latus BC commune. Denique $CHGF = ABCD$ per *isorema* (§. 178.) ergo $AKHE = ABCD$ quadruplo.

SCHOLIION.

§. 194. **H**inc quoque demonstratur, quod, si ex linea unius pedis quadratum fiat, & ex divisa hac linea in duas partes æquales, nempe in semipedes, etiam duo quadrata fiant; quadratum ex linea tota erit duplum quadrati ex duabus semilineis constructi.

PROPOSITIO XIII.

Tab. V. §. 195. Fig. 110. **O**mnes anguli simul sumpti in quocunque polygono totidem angulos

los rectos duplicatos continent, quot habent latera; minus tamen quatuor angulis rectis.

Polygonum ACE DB reduci potest ad mera triangula (§. 131.) nempe AOC, COE, EOD &c. quorum triangulorum singula æqualia sunt duobus angulis rectis (§. 77.) igitur hæc 5 triangula æqualia sunt decem angulis rectis: atqui polygonum ACE DB exprimit omnes angulos horum quinque triangulorum, exceptis angulis circa centrum O constitutis; hi-vero anguli, circa centrum O constituti, æquales sunt quatuor angulis rectis (§. 234.) ergo hujus polygoni omnes anguli simul sumpti juxta laterum multitudinem æquales sunt 10 angulis rectis, demptis quatuor, id est: æquales sunt 6 angulis rectis. Q.E.D.

SCHOLIUM.

§. 196. **P**Raxis facillima inveniendi valorem angulorum in polygonis quibusque est ista: denominator figuræ, qui v. g. in heptagono est 7, duplicatur, prodibunt 14. Ex his 14 detrahantur 4, restabunt 10 anguli recti, quos anguli interni alicujus heptagoni conficiunt; ut proportio anguli recti sit ad angulum heptagoni ut 7 ad 10.

Igitur si in polygono sex laterum SROXQP ex angulo *Tab. VI.* ad angulum recta ducatur linea, tot triangula polygonum il- *Fig. III.* lud referet, quot habet latera minus duobus; id est: polygonum hoc 6 latera habet, & 4 triangula complectitur; quodvis triangulum æquivalet duobus angulis rectis: igitur, & hexagonum SROXQP. æquivalet 8 angulis rectis. Atque exinde patet, quod omnes quæque figuræ rectilinæe ejusdem speciei æquales habeant fummas angulorum.

Itaque inibis computum graduum, quem anguli figurarum regularium continent, nempe

An-

| | | Grad. |
|---------|----------------------|-------------------|
| Angulus | Trianguli æquilateri | 60 |
| | Quadrati | 90 |
| | Pentagoni | 108 |
| | Hexagoni | 120 |
| | Heptagoni | 128 $\frac{1}{2}$ |
| | Octogoni | 135 |
| | Enneagoni | 140 |
| | Decagoni | 144 |
| | Hendecagoni | 147 $\frac{1}{2}$ |
| | Dodecagoni | 150 |
| | Icosagoni | 162 &c. |

Nam Icosagonum seu figura regularis 20 laterum = 40 angulis rectis — 4 id est 36. Dividuntur 36 per 20, quotus erit $1 \frac{1}{2}$ seu $1 \frac{1}{2}$ anguli recti, id est 162 gradus &c. Hac ratione licebit figuram quamvis regularem delineare: super dato latere constituentur gradus certi illius polygони regularis ope transportatorii, eademque semper lateris magnitudo ope circini manualis interponatur angulis. Sed de his plura §. 277. & seqq.

Præmissis hisce theorematibus, quibus quadrangulorum, polygonorumque natura atque proprietates illustrantur, jam ad selectiora quædam problemata procedamus.

PROPOSITIO XIV.

Tab. V. §. 197. *Fig. 91.* **S**uper data recta AB quadratum construere. Sit AB, linea data, ex B erigatur perpendicularis in C (§. 24.) quæ tam longa sit ac AB: eadem circini apertura servata ex C duc arcum in D, atque ex puncto A pariter duc arcum in D; si ex puncto D, in quo se arcus secuerint, lineas duxeris in A, & C, erit quadratum ADCB constructum.

COROLLARIUM I.

§. 198. **E**Adem prope ratione fit parallelogrammum; Nisi, *Tab. V.*
 quod super data recta AB minor erigatur linea B *Fig. 92.*
 C; ex C vero, intervallo AB, arcus fiat in D, atque ex A,
 intervallo BC, arcus in D. Quod deinde punctum D cum
 A & C lineis copulatur.

COROLLARIUM II.

§. 199. **S**I jam circulus quadrato inscribi intelligatur, cujus
 circuli diameter, per centrum ducta, tangat duo
 latera quadrati in medio; hæc ipsa diameter, in quadratum
 reducta, seu in longum, & latum ducta constituet æquale
 quadratum illi, cui circulus inscriptus fuerat.

PROPOSITIO XV.

§. 200. **S**uper data recta AB Rhombum construere.
 Ex B ducatur linea ad arbitrium in C, æqualis ip- *Tab. V.*
 si lineæ AB; tum eodem intervallo servato ducantur arcus ex C *Fig. 93.*
 in D, & ex A in D. In loco sectionis erit quartus angulus
 Rhombi.

COROLLARIUM.

§. 201. **R**Homboides eadem prope ratione describitur, nisi
 quod intervallo AB ex C ducatur arcus in D, ex
 A autem intervallo BC ducatur arcus in D.

PROPOSITIO XVI.

§. 202. **S**uper latere dato AB polygonum regulare, veluti pentagonum *Tab. VI.*
 ACEDB describere. *Fig. 112.*

Pro resolutione hujus problematis primo notum esse de-
 bet centrum pentagoni O (§. 205.) tum angulus centri O,
 Aa qui

qui lateri AB opponitur. Cum igitur circulus 360 gradus contineat (§. 235.) gradus hi juxta numerum angulorum dividuntur, id est per 5. quotus erit 72. Itaque super latere A B constituatur versus centrum angulus $AOB = 72$ graduum. Rursus triangulum $AOB =$ duobus rectis angulis (§. 77.) Igitur demptis 72 gradibus a 180 gradibus seu duobus rectis, remanebunt 108 gradus pro reliquis duobus angulis OBA , & OAB ; atqui duo anguli OBA , & OAB sunt æquales (§. 93.) Igitur quilibet eorum 54 gradus continebit. Jam e puncto B duc lineam in D æqualem ipsi AB, quæ angulum $OBD = 54$ grad. intercipiat. Ex O ducatur recta in D, atque ex D rursus ducatur linea in E, quæ angulum 54 graduum, nempe ODE subtendat. Post formata quinque ejuscemodi æqualia pentagonum super lineam AB descriptum esse deprehendes.

SCHOLION I.

§. 203. **S**I super dato latere hexagonum vel heptagonum, vel octogonum vel enneagonum aut dodecagonum describendum sit, dividantur 360 gradus vel per 6, 7, 8, 9, 12 &c. quot nempe latera illius sunt polygoni; Tum angulus ad centrum tot gradus contineat, quot numerus *quotus*, per divisionem elicitus. Subtrahatur quotus a 180 gradibus, & residuum in duas æquales partes, pro aliis duobus angulis dividatur, productisque circa centrum æqualibus lateribus fiat operatio conformis (§. 202.)

SCHOLION II.

§. 204. **O**Pe circini proportionalis polygonum quodcunque expedite formatur: sit v. g. formandum octogonum; itaque apprehenso manuali circino, pone ejusdem unum pedem in linea polygonali circini proportionalis numero octavo, ac tantum aperi vel constringe dictum proportionalem circinum, donec altero pede manualis circini numerum octavum in polygonali linea alterius cruris contingas; tum

tum ex proportionali circino sic coordinato desume per manua-
lem circinum distantiam numeri 6 in lineis polygonalibus,
atque juxta hanc distantiam ceu radium formetur circulus.
In hoc circulo latus octogoni, ex distantia numerorum 8 in
linea polygonali desumptum, octies describitur, habeturque
octogonum.

SCHOLIUM III.

§. 205. **C**entrum autem alicujus dati polygoni sic invenitur. *Tab. VI.*
Primo ex centrīs A & B beneficio arcuum F & G *Fig. 113.*
quærat̄ perpendicularis ipsi AB (§. 27.) tum etiam ex B &
D per arcus H & I quærat̄ altera perpendicularis ipsi BD.
Continuentur hæ duæ perpendiculares, & punctum O, in
quo se continuatæ perpendiculares secabunt, erit centrum
polygoni. Hoc centrum polygoni necessum est semper repe-
rire, quotiescunque dato polygono consimile polygonum for-
mari debet, quod ex sequenti theoremate elucet.

PROPOSITIO XVII.

§. 206. *Circuitus duorum polygonorum regularium similiarum habet se ut
radius ad radium.* *Tab. VI.*
Fig. ead.

Sint duo polygona regularia similia ABDEC, FGHIK
tanto major erit circuitus polygoni ABDEC, quam FGHIK,
quanto major erit radius OB radio DG. Nam sic se ha-
bet polygonum ABDEC ad latus AB, sicut se habet FGHIK
ad latus FG, cum ex *hypothesi* similia polygona sint; Et
sic se habet AB ad OB, sicut se habet FG ad DG, quia etiam
triangula sunt similia: Igitur etiam se habebit polygonum AB
DEC ad FGHIK sicut radius OB ad radium DG. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

§. 207. *Figuram regularem quamcunque super data recta describere.* *Tab. VI.*
Velis super data recta AB figuram ordinatam v. g. *Fig. 114.*
Aa 2 hepta-

heptagonum describere: circini pede altero in B posito, forma circulum AMN radio AB. Ab hoc circulo abscinde quadrantem ABM; hunc rursus quadrantem divide in 7 partes æquales, & post quadrantem ab M in N adjice 3 partes æquales prioribus 7. Tum denique ex centro S per puncta A B N circulum describe ABNK (§. 232.) & recta AB erit latus heptagoni, circulo ABNK inscribendi.

SCHOLION.

§. 208. **R**atio, quod post M adhuc 3 partes usque in N adjicere oporteat, est hæc: quia nempe angulus rectus ABM habet se ad angulum heptagoni ABN ut 7 ad 10. differentia vero inter 7 & 10 sunt 3. Igitur hæ tres partes pro angulo heptagoni constituendo adjiciendæ sunt.

§. 209. **C**onsimili modo figuræ aliæ quælibet ordinatæ super recta describi poterunt; antequam vero hoc fiat, necessum est proportionem anguli recti scire ad angulos aliarum figurarum; itemque differentias angulorum aliorum ab angulo recto, quæ quidem omnia sequentibus exprimuntur.

| | | |
|--------------------|--|---|
| Angulus rectus est | { | Ad angulum pentagoni ut 5 ad 6 diff. 1. |
| | | Ad angulum hexagoni ut 3 ad 4 diff. 1. |
| | | Ad angulum heptagoni ut 7 ad 10 diff. 3. |
| | | Ad angulum octogoni ut 2 ad 3 diff. 1. |
| | | Ad angulum enneagoni ut 9 ad 14 diff. 5. |
| | | Ad angulum decagoni ut 5 ad 8 diff. 3. |
| | | Ad angulum hendecagoni ut 11 ad 18 diff. 7. |
| { | Ad angulum dodecagoni ut 3 ad 5 diff. 2. | |

PROPOSITIO XIX.

Tab. VI. §. 210 *Juxta datum polygonum irregulare AEDCB aliud consimile, & æquale FGHIK describere.*
Fig. 15.

Pri-

Primum describatur linea $FK = AB$; tum circini pede posito in K , intervallo BC ducatur arcus in I , iterum posito circini pede in F intervallo AC ducatur arcus in I . Ex puncto intersectionis I versus H duc arcum intervallo CD , itemque ex F , intervallo AD , duc pariter arcum versus H . Denique ex H intervallo DE , & ex F intervallo AE cum arcus ducti fuerint in G , & puncta intersectionum I, H, G lineis copulata, habebitur $FGHIK$ simile & æquale ipsi $AEDCB$.

COROLLARIUM.

§. 211. **R**atio autem præ cæteris expedita delineandi figu- *Tab. VI.*
Fig. 116. ras quascunque irregulares obtinetur beneficio circini tripedalis, v. g. cum simile polygonum irregulare delineandum foret ipsi polygono mox præcedenti $AEDCB$, defigantur tres pedes circini in A, B, C , & transferantur in F, K, I , mox mensurentur eo circino latera, & anguli B, C, D & transferantur in K, I, H ; denique C, D, E transferantur in I, H, G eritque petitum polygonum descriptum.

PROPOSITIO XX.

§. 212. *Aream quadrati AB metiri.*
 Scire cupias, quotnam perticas quadratas campus quadratus contineat, cujus unum latus est 10 perticarum; Igitur basim $AB = 10$ pert. multiplica cum altitudine AC pariter 10 perticarum, & habebis areæ seu campi 100 perticas quadratas. *Tab. VI. Fig. 117.*

SCHOLION I.

§. 213. **Q**uemadmodum numerus in se ductus v. g. 8×8 quadratum efficit numerum 64 (§. 140. *Arithm.*) ita etiam apud Geometras spatia in se ducta efficiunt quadrata spatia; sic una pertica, quæ 10 pedes complectitur, in se ducta efficit quadratum 100 pedum. 5 perticæ quadratæ continent 2500 pedes quadratos.

SCHOLION II.

§. 214. **Q**uod si campi latus contineret v. g. 16 perticas, & 5 pedes, uteris arithmetica decimali, quadrando numerum $16\frac{5}{10}$ (§. 162. *Arithm.*) Etenim 16 perticæ, & 5 pedes sunt 165 pedes hac ratione

$$\begin{array}{r} 165 \\ \hline 825 \\ 990 \\ 165 \\ \hline 27225 \end{array}$$

Id est: campi quadrati superficies continebit 27225. Neque enim numerus quadratus 27225 dividi debet per 10, ut rursus in perticas redigatur, sed per 100, eo quod pertica una quadrata non 10 pedes, sed 100 contineat (§. 213.)

COROLLARIUM.

§. 215. **Q**uemadmodum quadrati area mensuratur, cum latus unum quadrati multiplicatur per aliud, ita & in parallelogrammis evenire solet; nam latus brevius multiplicatum cum latere longiori præbet aream Parallelogrammi.

PROPOSITIO XXI.

Tab. VI.
Fig. 118.

§. 216. **R**hombi ACFB aream metiri. Neglectis Rhombi angulis demitte ex C & F perpendiculares in D & E; tum vero DE × DC dabit aream Rhombi; Etenim ACFB = DCFE (§. 181.)

§. 217. **A**reæ Rhomboidum hac prorsus methodo mensurantur; demissis namque perpendicularibus ex Rhomboide fit parallelogrammum, cujus longius latus cum breviore multiplicatum dat Rhomboidis aream.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

§. 218. *Trapezii cujusque aream metiri.*

Sit trapezii D A B C mensuranda superficies; duc diagonalem A C; ex D autem & B dimitte perpendiculares in dictam diagonalem, nempe D E, & B F. Porro dimidium duarum perpendicularium D E & B F multiplica cum perticis vel pedibus lineæ diagonalis A C, habebisque productum, nempe pedes, vel perticas cubicas hujus areæ.

Tab. VI.
Fig. 119.

Nam $A F B + B F C = A C G$; & $A E D + D E C = H A C$: ergo etiam $D A B C = H A G C$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

§. 219. *UT* autem area trianguli A C G vel C A H invenitur, debet vel C G cum media linea A C, vel tota linea A C cum media linea C G multiplicari; Si enim A C \times C G prodit parallelogrammum, cujus triangulum A C G est dimidium. (§. 182.)

Fig. ead.

COROLLARIUM II.

§. 220. *Q*uoniam omne polygonum in mera potest triangula resolvi (§. 131.) cognito valore & superficie triangulorum, innotescet etiam valor ac superficies polygonorum.

PROPOSITIO XXIII.

§. 221. *D*atum quadratum sepius multiplicare.

Sit quadratum A C D B duplicandum. Primum lineæ rectæ laterales A B & A C protrahantur. Tum duc diagonalem C B, hocque servato intervallo, extende circinum utrinque ex A in 2. A 2 erit latus quadrati duplicati (§. 95.) Quod si rursus duxeris rectam B 3, eamque pro latere quadrati constitueris, erit quadratum A C D B triplicatum. La-

Tab. VI.
Fig. 120.

tus

tus $B^2 = A^4$ dabit quadratum $A C D B$ quadruplicatum &c.

COROLLARIUM I.

Tab. VI. §. 222:
Fig. 121.

Alio modo datis duobus quadratis tertium, ambo-
bus æquale, sic construitur : sit quadratum, cu-
jus unum latus MN , alterius quadrati latus sit NO . Hæc
duo latera jungantur ad angulum rectum MNO , & hypo-
thenusa desuper ducta MO dabit latus quadrati, æqualis duo-
bus datis nempe $MN \times MN$ & $NO \times NO$. (§. 96.) Quod si
tribus datis quadratis quartum æquale construere sit animus;
erigatur latus tertii quadrati MX perpendiculariter super MO ,
& ducatur hypothenuſa XO , hæc dabit latus quadrati æqua-
lis tribus datis, ita ut $XO \times XO = XM \times XM + MN \times MN$
 $+ NO \times NO$. Nam latus MO dat quadratum æquale duobus
quadratis ex lateribus MN & NO ; & hypothenuſa XO dat
æquale quadratum duobus quadratis ex lateribus MO & MX ;
Igitur XO dat quadratum æquale tribus XM , MN & NO .
Quod si quatuor quadratis datis ex lateribus SX , XM , MN ,
 NO quintum quadratum æquale construere velis, erigatur
latus quarti quadrati XS perpendiculariter supra latus XO ,
& ducatur hypothenuſa SO , hæc erit latus quinti quadrati
æqualis quatuor datis prioribus; seu: $SO \times SO = SX \times$
 $SX + XM \times XM + MN \times MN + NO \times NO$. Et sic porro.

COROLLARIUM II.

§. 223. **T**riangula duplicantur, cum servata basi, altitudo
duplicatur; aut vicissim, cum, servata altitudi-
ne, duplicatur basis (§. 90.) triplicantur, cum, servata aut
basi aut altitudine, alterutrum duplicatur (§. 90.) quadran-
tur vero cum & basis & altitudo duplicatur (§. 92.)

PROPOSITIO XXIV.

§. 224. **D**atum polygonum regulare qualecunque, aut etiam circulum,
quotiescunque lubet, multiplicare. Fit

Fit hoc beneficio circini proportionalis (§. 116). qui tanto intervallo aperitur, ut longitudo unius lateris in polygono multiplicando, vel etiam diametrus circuli multiplicandi, circino manuali mensurata, in characterem 1 & 1 lineæ geometricæ transferri possit. Si itaque ter v.g. polygonum, vel circulum ampliare petas, desume circini proportionalis distantiam 3, & 3 in linea geometrica, & habebis latus, aut diametrum polygona, aut circuli multiplicandi; & sic in aliis multiplicationibus agendum.

PROPOSITIO XXV.

§. 225. *Super data recta AB describere simile, non tamen aequale polygonum M ipsi polygono dato N.* Tab. VI.
Fig. 122.

Datum polygonum N resolvatur in triangula, & super data recta AB fiant, ope transportatorii, anguli CAB, & CBA æquales angulis GEF, GFE, quorum latera jungantur in puncto in erectionis C. Porro ipsi C, & B adjungantur anguli BCD, & CBD æquales angulis GFH, FGH. Hi duo anguli BCD, CBD coibunt in D, facientque polygonum M simile, & tanto majus polygono N, quanto data recta AB major est linea EF (§. 92).

Nam anguli BAC, ACB, BCD, CDB, DBC, CBA ex hypothesi sunt æquales angulis FEG, EGF, FGH, GHF, HFG, GFE; ergo & ipsa polygona M, & N æquiangula sunt (§. 88). Porro AB. BC :: EF. FG. Et BC. BD :: FG. FH. ergo polygona M, & N prorsus similia sunt.

COROLLARIUM I.

§. 226. **H**Æc eadem est methodus vastas figuras ad minora spatia redigendi, ut non immerito in delineandis mappis ichnographicis fundorum, atque ædificiorum optime hac methodo utaris, etiamsi figuræ forent 100 angulorum.

COROLLARIUM II.

Tab. VI. §. 227. **I**nstrumentum ichnographicum celebre est, quod *Fig. 123.* parallelogrammum graphicum nuncupatur, & cujus ope facillime majores figuræ minori forma exprimentur. Constat hoc parallelogrammum graphicum 4 potissimum regulis, per vertebrae copulatis AB, BC, DE, EF. Mensæ stilus ferreus infigitur, atque in eum extremitas A beneficio foraminis immissa circumrotatur. Extremitati E imponitur cerussa; extremitati C autem imponitur stilus acutus, quem stilum si duxeris per lineamenta subjacentis in charta figuræ, depinget cerussa E in charta subjacente munda figuram prorsus similem, sed quadruplo minorem, in hac nempe linealis dispositione: quia cum triangulum ABC latera habeat duplo majora, quam triangulum ADE, vel EFC, erit ABC quadratum ipsius ADE. triangula se quippe habent in duplicata ratione laterum homologorum (§. 92.). Celeb. *Marinonius* triplicem præcipue modum, ope parallelogrammi graphici mappas ad modulos cujuscunque formæ minoris reducendi, complexus est ubertim juxta ac eruditissime cum vario Tabellarum apparatu Cap. VII. *de Re ichnographica*, auctorque tibi sum, ut in accurando hujus instrumenti usu, ejus manuuctione utaris. Quod si vertebrae DF ad alia foramina MM, & NN applicaveris, variabis continuo pro foraminum proportione figuram.

COROLLARIUM III.

Tab. VI. §. 228. **A**lia præterea ratio est ampliandi, vel minuendi figuræ, quando assumpto medio puncto A figuræ ampliandæ ad omnes angulos rectæ lineæ ducuntur v. g. AB, AC, AD, AE &c. tum si latus figuræ ampliandæ AX duplicatur in AB, & AZ in AC, AO in AD, AS in AE &c. resultabit figura quadruplo major; cum enim hæc duo triangula AXZ, & ABC habeant se in duplicata ratione (§. 92.). Etiam tota figura; quæ meris triangulis constat, se habebit
in

in duplicata ratione, id est, ut quadrupla. Si figura sit quadruplo minuenda, demitur in radio medietas versus centrum.

COROLLARIUM IV.

§. 229. **A**liter figuræ ampliuntur, vel minuuntur, cum ex *Tab. VI.* aliquo angulo A rectæ continuantur per omnes *Fig. 125.* alios angulos v. g. AB, AC, AD &c. tum si latus AG duplicatum fuerit in AB, & AH in AC, & AK in AD, sicque porro cum aliis lineis angulorum, fiet figura quadruplo major, ob rationes mox (§. 228) insinuatæ, quia nempe triangu-
 gula habent se ad invicem in duplicata ratione laterum (§. 92). Si figura foret quadruplo minuenda, tum lineæ ad angulos ductæ medietate minuuntur. *Euclides Lib. VI. Proposit. 20.*

COROLLARIUM V.

§. 230. **D**enique alia adhuc ratione ampliuntur figuræ, cum *Tab. VI.* punctum aliquod extraneum assumitur B, atque *Fig. 126.* ex hoc puncto B per angulos figuræ A, S &c. continuæ rectæ ducuntur, tum si his rectis aliæ lineæ addantur, quæ lineis, seu lateribus figuræ ampliandæ sint parallelæ v. g. AO, CX, item DS, GK. Item SF, KH &c. prodibit figura eo major, vel minor, quo fuerit distantia BA, item distantia BD &c. vel major, vel minor. Hujus problematis est usus in Physica, ubi agitur de viribus gravitatis pro ratione distantiaë a centro telluris

COROLLARIUM VI.

§. 231. **E**X omnibus hisce commemoratis figuris, planis, regularibus, triangulo nimirum, quadrato, pentagono, hexagono, heptagono, octogono, enneagono &c tres tantummodo sunt species, quæ conjunctæ planam superficiem continuam efficiant, nempe triangula, quadrata, & hexagona. Quod si enim sex triangula æquilatera, aut 4 quadrata, aut 3 hexagona componas, utrobique superficies pla-

na continua confurget ; quia nempe ad hoc, ut ex angulis pluribus conjunctis superficies plana continua habeatur, debent illi anguli conjuncti omnes insimul efficere 4 angulos rectos ; at hos quatuor rectos tantum efficiunt figuræ triplices mox memoratæ ; nam trianguli æquilateri angulus est graduum 60. Igitur 6 similia triangula efficiunt gradus 360, cum angulus quadrati rectus sit, nempe 90 graduum. Denique angulus hexagoni cum sit 120 graduum, constituent pariter tria hexagona conjuncta 360 gradus, id est quatuor rectos. Aliæ autem figuræ conjunctæ vel pauciores, vel plures angulorum gradus complectuntur : igitur dictæ triplices figuræ regulatæ tantum valent superficiem continuam planam constituere.

C A P U T VII.

De Circulo, aliisque Figuris curvilineis.

D E F I N I T I O N E S.

Tab. VI. §. 232. Fig. 127. **C**irculus est figura plana ex infinitis triangulis composita, quæ una curva linea comprehenditur, & cujus omnia puncta a centro æquidistant. Partes circuli sunt : *Peripheria*, seu circumferentia, *centrum*, *segmentum*, *chorda*, *diameter*, *radius*, *intervallum*, *area*.

§. 233. **P**eripheria est circuli ambitus ABCF. *Centrum* dicitur illud punctum, a quo omnia peripheriæ puncta æquidistant, nempe D. *Diameter* est linea recta AC, per centrum D incedens, & utrinque in peripheriam terminata. *Radius* est linea a centro D ad peripheriam ducta v.g. DB, alias etiam dicitur *semidiameter*. *Intervallum* est spatium, inter centrum, & peripheriam interceptum. *Area* est tota plana circuli superficies. *Chorda* est linea recta GH, ab uno puncto circuli ad alterum ducta, quin centrum D contingat. Hæc chorda duos arcus subtendit, majorem alterum GBH, alte-

alterum minorem GFH : dum autem chorda simpliciter dicitur arcum subtendere , intelligitur passim arcus minor. *Segmentum* circuli , est certa circuli pars arcum , & chordam comprehendens , v. g. GBH est segmentum majus , quia majus est semicirculo , GFH vero est segmentum minus , quia minus semicirculo. *Sector* circuli , est certa circuli pars , inter duos radios comprehensa v. g. BE.

§. 234. **P**eripheria circuli dividitur communiter in 360 *gradus* , *gradus* quilibet in 60 *minuta* , *minutum* in 60 *secunda* , *secundum* in 60 *tertia* &c. Hinc habetur mensura angulorum ad centrum constitutorum ; tot quippe graduum dicitur angulus , quot graduum erit arcus angulo oppositus. Itaque cum circulus in 4 angulos rectos per centrum dividatur nempe ACBF , sequetur , quod quemvis angulum rectum v. g. ADB subtendant 90 gradus , obtusum ADE plures gradus , acutum EDC pauciores.

PROPOSITIO I.

§. 235. **C**irculus quisque minor BFGC totidem gradus complectitur , Tab. VI.
quot circulus quicumque maximus DIHE. Fig. 128.

Nam quisque circulus dividitur in 360 gradus , ergo minor tot gradus complectitur , quot major ; minoris tamen circuli sunt quoque minores gradus. Item in circulis concentricis gradus majoris circuli correspondent gradibus circuli minoris. Denique duorum circulorum concentricorum BFGC , & DIHE arcus BC , & DE , inter duos radios AD , & AE comprehensi , eandem rationem habent ad sui quisque circuli peripheriam ; atque iidem arcus BC , & DE complectentes eundem numerum graduum sunt similes inter se.

DEFINITIONES.

§. 236. **C**irculi alii sunt *concentrici* , quorum idem est centrum. Alii *excentrici* , quorum diversa sunt centra. Alii
B b 3 sunt

funt circuli *verticales*, qui ducuntur per peripheriæ suæ summum, & infimum, uti est meridianus ductus per *Zenith*, & *Nadir*, de quo in *Astronomia*.

PROPOSITIO II.

Tab. VI. §. 237. Fig. 129. **D**uo circuli A, & B non se contingunt ab extrinseco, nisi in unico puncto D. Neque possunt se in alio puncto v.g. in C contingere simul.

Nam si duo circuli se possent simul in C contingere, tunc lineæ duæ BC, & CG essent æquales duabus lineis BD, & DG, quod est impossibile (§. 12). Igitur hi duo circuli extra punctum D in alio simul puncto se contingere nequeunt.

§. 238. **S**ic pariter duo circuli A, & G ita se ad intra in unico puncto H contingunt, ut se in alio quopiam puncto v.g. M simul contingere prorsus nequeant.

Nam si simul in his duobus punctis H, & M se contingerent, tunc radius EH foret æqualis lineæ EM; igitur GEH esset æqualis ipsi GEM; cum eadem quantitas GE addita æqualibus EH, & EM faceret æquale (§. 2 axiomate 2). ergo etiam GM esset æqualis ipsi GEM, quod est impossibile (§. 12). Q.E.D.

PROPOSITIO III.

Tab. VI. §. 239. Fig. 130. **C**horda, qua fuerit centro propinquior, etiam erit maior.

Nam sint duæ chordæ BC, & DE, tunc arcus $BD + DO + OE + EC > DO + OE$: igitur chorda BC majorem arcum subtendit, quam chorda DE. Et sic $BC > DE$. Q.E.D.

PROPOSITIO IV.

Fig. ead. §. 240. **S**i ex certo aliquo puncto extra circulum v.g. ex F plures lineæ ad peripheriam circuli ducantur v.g. FH, FG; illa linea erit brevior, qua magis centro A appropinquabit.

Nam

Nam $AH + HF < AG + GF$ (§. 12); sed $AH = AG$ (§. 232) : ergo etiam $HF < GF$. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

§. 241. *SI in semicirculo AC describatur angulus ABC, sive ADC, Tab. VI. sive quicumque alius, semper ille erit rectus, adeoque angulus Fig. 131. recti segmentum est semicirculus. Quod si vero angulus in majori segmento describatur v. g. EBF, erit angulus acutus. Si demum in minori segmento quomodocumque describatur v. g. GDC, erit angulus obtusus. Eucl. III. 31.*

Nam primo, quod angulum rectum in semicirculo attinet, ducatur recta KD, -quia $AK = KD$ (§. 232.) Etiam anguli KAD, KDA æquales erunt (§. 80.) Ergo duo anguli DAK + DCK sunt æquales duobus angulis ADK + KDC seu toti ADC: atqui qualescunque anguli triangulorum simul sumpti constituunt duos rectos; igitur angulus ADK + KDC constituent semissem duorum rectorum angulorum, seu unum angulum rectum.

Secundo, quod angulum spectat acutum EBF majoris segmenti: ducatur diametrus ED; juxta mox dicta EFD est angulus rectus; angulus vero FDE angulus acutus, utpote qui unacum angulo FED angulum rectum componat (§. 77.) sed anguli in eodem circuli segmento sunt æquales (§. 247.) Eucl. III. 21. ergo angulus FDE minor est recto.

Tertio, angulus ADC est rectus, ergo angulus GDC = GDA + ADC major erit recto, seu obtusus. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

§. 242. *Angulus majoris segmenti FNH mensuratur medio arcu majoris segmenti NEF, nempe NE. Tab. VI. Fig. 132.*

Duca-

Ducatur primo altera diametrus DE , quæ parallelas NF , & BC perpendiculariter per medium secet; Tum ducatur radius AN , qui tangentem GH pariter secet ad perpendicularum. Jam angulus $FNH = FNA + ANH$: ideoque cum anguli FNA , & NAB sint alterni, erunt etiam æquales (§. 66.) & $ANH = BAE$ (§. 59.) Igitur $FNH = NAB + BAE$; atqui anguli $NAB + BAE$ mensurantur arcu NE ; ergo etiam angulus FNH mensurabitur medio arcu majoris segmenti NE , seu NE . *Quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO VII.

Fig. ead. §. 243. **A**ngulus minoris segmenti, FNG mensuratur medio arcu minoris segmenti NDF , nempe ND .

Nam anguli GNA , & BAD sunt recti (§. 54.) & angulus $FNA = BAN$ (§. 66.) demantur jam ex duobus rectis GNA , & BAD duo æquales anguli FNA , & BAN , remanebunt æquales anguli GNF , & NAD (§. 2. *Axiomate 2.*) Atqui angulus NAD mensuratur arcu ND ; ergo etiam angulus minoris segmenti FNG mensurabitur medio arcu minoris segmenti NDF , nempe ND . *Q.E.D.*

PROPOSITIO VIII.

Tab. VI. §. 244. Fig. 133. **S**I super eadem peripheria AC , tanquam basi, ducatur angulus ad centrum B , nempe ABC , erit duplus anguli AEC , ADC , AEF , & cujusque alterius anguli ad peripheriam ducti; nempe cum eadem peripheria AC fuerit basis angulorum. *Eucl. III. 20.*

Nam primo angulus externus ABC est æqualis duobus internis $BCE + BEC$ (§. 76.); sed angulus $BCE = BEC$ (§. 94.) ergo etiam angulus ABC duplus est anguli AEC .

Secundo ducatur ex D per centrum B diametrus DBK . Jam externus angulus ABK æqualis est duobus internis BD
 $A+$

A + B AD (§. 76.) atqui BAD = BDA (§. 94.) ergo ABK est angulus duplus ipsius ADK; Angulus autem ABC est duplus anguli ABK, & ADC est duplus ipsius ADB (§. 57.) ergo etiam angulus ABC est duplus anguli ADC.

Tertio ex F ducatur per centrum B diameter FBG, erit angulus ABG duplus anguli AFG, & ablati angulus CBG duplus ablati anguli CFG. Igitur etiam angulus ABC erit duplus ipsius anguli AFC. *Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIUM.

§. 245. **E**Adem ratione angulus rectus ABC ad peripheriam *Tab. VI.* semicirculi descriptus, erit ut dimidium semicirculi *Fig. 131.* AIC; si nempe angulus rectus versus centrum K ductus fuerit; perpendicularis quippe IK, in rectam AC demissa, facit duos angulos rectos.

PROPOSITIO IX.

§. 246. **A**ngulus ad peripheriam ADC mensuratur medietate arcus *Tab. VI.* AFGC, super quo descriptus est. *Fig. 133.*

Nam tres anguli ADM, ADC, CDN mensurantur valore medii circuli (§. 60 & 234;) atqui ADM mensuratur medio arcu AD (§. 242.) & CDN medio arcu CD: Igitur ADC mensuratur medio arcu AFGC. Et tres hæ arcuum medietates constituunt medium circumulum.

PROPOSITIO X.

§. 247. **A**nguli super eodem circuli segmento, quorum vertex ad quodlibet *Fig. ead.* peripheria punctum pertingit. v.g. AFC, ADC, AEC sunt inter se æquales.

Cc

Nam

Nam singuli hi anguli AFC, ADC, AEC sunt dimidium anguli ABC (§. 244.) ergo sunt æquales inter se (§. 2. Axiom. 4.)

PROPOSITIO XI.

Tab. VI. §. 248. *Fig. 134.* Si in Circulo linea recta, per centrum ducta, AB, aliam rectam EF non per centrum C ductam ad angulos rectos in D secuerit, secabit eam perpendiculariter & bisariam. Eucl. III. 3.

Nam ob æqualem mensuram CE & CF; Item ED & FD linea CB est perpendicularis lineæ EF (§. 24.) si vero est perpendicularis, etiam facit CDE & CDF angulos rectos (§. 54.)

Fig. ead. §. 249. Itaque etiam, si ex puncto A, in quo recta MN Circulum tangit, ducatur ad centrum radius AC, seu diameter AB; hic radius AC erit etiam perpendicularis ad tangentem MN: & e converso, si ex puncto A tangentis MN recta perpendiculariter erigatur, hæc per centrum C transibit; Nam lineæ EF & MN sunt parallelæ. (§. 18.)

PROPOSITIO XII.

Tab. VI. §. 250. *Fig. 128.* Arcus BC & DE circulorum concentricorum, iisdem a centro A radiis, nempe ABD & ACE comprehensi, sunt similes inter se.

Nam uterque circulus IDEH, & FBCG continent æqualem numerum graduum nempe 360 (§. 235.) Atqui sicut se habet arcus DE ad IDEH, ita se habet arcus CB ad FB CG; Nam sicut arcus DE + ID + EH = 180 gradibus, seu medio Circulo, ita etiam Arcus BC + FB + CG = 180 gradibus: ergo arcus BC & DE circulorum concentricorum, iisdem radiis comprehensi, sunt similes inter se.

COROLLARIUM.

§. 251. **D**iametri quoque circulorum, sunt ad invicem, ut peripheriæ; sic quemadmodum se habet radius AC ad peripheriam F G C B; ita se habet radius A E ad peripheriam I H E D. atqui AC, A E sunt semidiametri; Igitur etiam diametri se habent ut peripheriæ. *Fig. ead.*

PROPOSITIO XIII.

§. 252. **D**iametrus circuli ad peripheriam est incommensurabilis. Communiter tamen proportio adfertur diametri ad peripheriam ut 7 ad 22; hæc autem proportio non est omnino suis numeris absoluta: numerus enim peripheriæ 22 est major aliquantulum, quam ferat proportio ad diametrum 7. Alii ponere proportionem ut 71 ad 223: sed neque hæc est omnino accurata. Alii hanc proportionem expresserunt ut 100 ad 314; at & iste numerus peripheriæ 314 minor est, quam sit proportionalis numerus diametri 100. *Adrianus Metius* ut 113 ad 355. Quæ proportio in parvis Numeris est accuratior cæteris. Alii proportionem posuerunt inter diametrum, & peripheriam ut 2437782 ad 7660719. *Cl. Wolffius* assignat rationem prope veram diametri ad peripheriam, ut 1000000000000000 ad 31415926535897932. *Elem. Geom. §. 425.*

§. 253. **A**rchimedes docet, cujuslibet circuli peripheriam triplicem esse diametri, & adhuc superare parte, quæ quidem minor sit decem septuagesimis, hoc est septima parte diametri; major vero decem-septuagesimis primis.

Demonstratur: ad semidiametrum AB dati circuli ducatur perpendicularis EF. Ex B abscindatur arcus 30 graduum in C, & D. Ex A protendatur secans per C in E, & per D in F, eruntque duo triangula ABE, ABF. Totum vero triangulum AEF æquiangulum, & æquilaterum, (§. 94.) AB

vero erit perpendicularis EF, & EB = FB; denique EF dupla ipsius EB (§. 24.) & etiam AE dupla ipsius EB.

Ponatur itaque BE esse parium 153, erit AE = ipsi E F partium 306. Quadratum ipsius BE = 23409 subtrahatur a quadrato ipsius AE = 93636. Residuum manet 70227 quadratum nempe ipsius AB (§. 99.) Cujus 70227 radix est paulo major, quam 265 (est enim radix, licet non vera, proxima tamen 265 $\frac{2}{7}$ vel $\frac{1}{2}$ (§. 148. *Aritbm.*) ideoque AB majorem habet proportionem ad BE, quam 265 ad 153, & vicissim EB habet minorem proportionem ad BA, quam 153 ad 265.

Secundo jam angulo EAB bifariam per rectam AG (§. 57.) Quoniam linea recta AG dividens angulum EAB facit duas partes divisæ baseos, nempe EG, & GB proportionales, sicut EA, & AB sunt inter se proportionales: seu EA. AB : : EG. GB (§. 261.) *Eucl. lib. VI. prop. 3.* & componendo EA + AB. AB : : EG + GB = EB. GB. Et permutando EA + AB. EB : : AB. BG; & quia EA + AB majores sunt quam 571 (quippe EA = 306, & AB = circiter 265 $\frac{2}{7}$) & EB posita est 153; habebunt EA + AB ad EB majorem proportionem, quam 571 ad 153; ideoque, & proportio AB ad BG major erit, quam 571 ad 153; ac proinde si BG ponatur 153, erit AB paulo major quam 571. Ergo quadratum ipsius AB paulo majus erit, quam 326041; ideoque cum quadratum ipsius BG sit 23409, erit quadratum ipsius AG, quod est æquale quadratis rectarum AB, & BG (§. 96 & 99,) paulo majus, quam 349450, ejusque radix major, quam 591 $\frac{1}{2}$. Ergo AG ad GB majorem habet proportionem, quam 591 $\frac{1}{2}$ ad 153.

Rursus secundo angulo GAB bifariam, per rectam AM, erit iterum GA ad AB sicut GM ad MB *Eucl. lib. VI. prop. 3.* & componendo GA + AB. AB : : GB. MB, & permutando GA + AB. GB : : GB. MB: & quia GA + AB majores sunt, quam 1162 $\frac{1}{2}$ (nam AG major est, quam 591 $\frac{1}{2}$, & AB est major

major quam 571) GB autem posita est 153; habebunt GA + AB ad GB majorem proportionem, quam 1162 $\frac{1}{4}$ ad 153: ac proinde si BM ponatur 153, erit AB major, quam 1162 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius AB majus erit, quam 1350534 $\frac{3}{4}$ vel $\frac{1}{2}$; cui si addatur quadratum 23409 ipsius BM, erit quadratum ipsius AM, quod quadratis rectorum AB, & BM æquale est, majus, quam 1373943 $\frac{3}{4}$ seu $\frac{1}{4}$; & propterea etiam ejus radix, id est recta AM paulo major, quam 1172 $\frac{1}{4}$; Ergo AM habebit majorem proportionem ad MB, quam 1172 $\frac{1}{4}$ ad 153.

Porro secetur angulus MAB bifariam per rectam AN: erunt componendo, & permutando MA + AB ad MB, ut AB ad BN; & quia MA major est, quam 1172 $\frac{1}{4}$, & AB major, quam 1162 $\frac{1}{4}$, erunt MA + AB majores quam 2334 $\frac{3}{4}$ vel $\frac{1}{4}$. Cum ergo BM posita sit 153, habebunt MA + AB majorem proportionem ad BM, quam 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153; ideoque, & AB ad BN majorem habebit proportionem, quam 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153; ac proinde si BN assumatur æqualis 153, erit AB major, quam 2334 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius AB majus erit, quam 5448723 $\frac{1}{4}$; cui si addatur quadratum 23409 ipsius BN, erit quadratum ipsius AN, quod quadratis rectorum AB, & BN æquale est, majus, quam 5472132 $\frac{1}{4}$, ejusque radix major quam 2339 $\frac{1}{4}$: Ergo AN ad BN majorem habet proportionem, quam 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153.

Denique secto angulo NAB bifariam, per rectam AH, erit, ut antea componendo, & permutando, NA + AB ad NB, ut AB ad BH; & quia NA major est, quam 2339 $\frac{1}{4}$, & AB major, quam 2334 $\frac{1}{4}$, erunt NA + AB majores, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Cum ergo BN posita sit 153, habebit NA + AB ad BN, hoc est AB ad BH majorem proportionem quam 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153; ac propterea si ponatur BH 153, erit AB major, quam 4673 $\frac{1}{2}$.

His itaque præmissis demonstrationibus concludere pergit

git *Archimedes*: Peripheriam circuli ter in se completi diametrum, & adhuc superare partem, quæ minor sit, quam $\frac{1}{7}$; major vero, quam $\frac{1}{7}^{\circ}$. Seu, si pro diametro affumatur 1, habebit peripheria circuli, ad Unitatem diametri, minorem proportionem, quam $3\frac{1}{7}$ seu $3\frac{1}{7}^{\circ}$: majorem vero, quam $3\frac{1}{7}^{\circ}$. Qua quidem determinatione *Archimedes* differentiæ, inter diametrum circuli ejusdemque peripheriam intercedentis, limites nempe $3\frac{1}{7}^{\circ}$, & $3\frac{1}{7}$ ad tantam parvitatem redegit, ut alter limes ab altero, non nisi $\frac{1}{497}$ differret; Nam subtractis $\frac{1}{7}^{\circ}$ a $\frac{1}{7}$ remanet differentia $\frac{1}{497}$ (§. 71. *Arithm.*)

Itaque angulus EAB est $\frac{1}{3}$ recti anguli: ergo ejus semiffis GAB est $\frac{1}{6}$ recti; & hujus anguli semiffis MAB est $\frac{1}{12}$ recti: & hujus semiffis NAB est $\frac{1}{24}$ recti: denique hujus semiffis HAB est $\frac{1}{48}$ recti. Qualium ergo partium 48 est quadrans circuli, talium una est arcus BH; atque idcirco BH est totius peripheriæ circuli, seu quatuor rectorum $\frac{1}{12}$.

Fiat jam angulus OAB, æqualis angulo HAB, eritque totus angulus HAO $\frac{1}{96}$ totius peripheriæ circuli; ideoque & arcus HO erit $\frac{1}{96}$ totius peripheriæ. Recta ergo HO erit latus polygoni nonaginta sex angulorum, circulo circumscripti.

Et quoniam ostensum est, semidiametrum AB ad BH habere majorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153; ideo etiam diameter IB, dupla ipsius AB, habebit ad HO, duplam ipsius HB, majorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Si ergo HO, latus polygoni, ponatur 153, erit diameter IB major, quam $4673\frac{1}{2}$. Multiplicentur jam ambitus polygoni nonaginta sex laterum, cum uno latere nempe $153 \times 96 = 14688$, habebitque ambitus polygoni ad diametrum IB majorem proportionem, quam 14688 ad $4673\frac{1}{2}$.

Est autem proportio 14688 ad $4673\frac{1}{2}$ minor, quam $3\frac{1}{7}^{\circ}$ ad 1; eo quod 14688 ad $4673\frac{1}{7}$ (qui numerus utique minor est,

est, quam $4673\frac{1}{2}$) habeat proportionem ut $3\frac{1}{7}\frac{0}{0}$ ad 1. Igitur, & ambitus polygoni ad diametrum IB proportionem habet minorem, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{0}$ ad 1. Ergo multo magis circumferentia circuli, quæ minor est ambitu polygoni, minorem proportionem habet ad diametrum, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{0}$ ad 1.

Atque ex his quidem demonstratur: peripheriam habere ad diametrum minorem proportionem, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{0}$ ad 1. Nunc altera restat demonstranda propositio pars; quod proportio tamen major sit, quam $3\frac{1}{7}\frac{0}{0}$ ad 1. idque ex mente *Archimedis*.

Triangulum BAC est $\frac{1}{4}$ anguli recti (§. 244.) & AC du- *Tab. VII.*
pla ipsius BC; ideoque si quadratum fiat ex AC = 1560, & *Fig. 136.*
subtrahatur ab eo quadratum ipsius BC = 780, remanebit
quadratum ipsius AB, cujus radix est paulo minor, quam
1351 (§. 95 & 96.) & si AC. BC :: 1560. 780, habebit se
AB ad BC paulo minus, quam 1351 ad 780.

Dividatur angulus BAC in duos æquales per rectam AG (§. 57.) erit arcus BG = GC *Eucl.* III. 26, & angulus GCB = GAC vel GAB (§. 247.) item angulus communis utrique triangulo AGC, & FGC: igitur & anguli ACG, & GFC æquales (§. 87.) & triangulum totum AGC simile triangulo CGF. Jam AG. GC :: GC. GF. & iterum AG. GC :: AC. CF (§. 94.) atque AB. AC :: BF. FC, & componendo: AB + AC. AC :: BF + FC = BC. CF. & iterum permutando: AB + AC. BC :: AC. CF *Eucl.* VI. 3. (§. 261.) Ergo etiam AB + AC. BC :: AG. GC. Verum AB est paulo minor, quam 1351; igitur etiam AB + AC ad BC, item AG ad GC minorem habet proportionem, quam 1351 + 1560 = 2911 ad 780; & per consequens, quadratum ipsius AB paulo minus, quam 8473921. Hoc quadratum 8473921 addatur quadrato GC nempe 608400, erit factum 9082321 pariter majus, quam quadratum AC: ideoque recta AC paulo minor est radice 3013 $\frac{1}{4}$, & AC ad GC paulo minorem habet proportionem, quam 3013 $\frac{1}{4}$ ad 780.

Di-

Dividatur rursus angulus GAC in duos æquales per rectam AH (§. 57.) Jam sicut $AG + AC$ ad GC ; ita se habebit AH ad HC ; cum autem AG paulo minor sit, quam 2911 , & AC paulo minor, quam $3013\frac{1}{4}$, etiam $AG + AC$ ad GC , seu AH ad HC minorem habebit proportionem, quam $2911 + 3013\frac{1}{4} = 5924\frac{1}{4}$ ad 780 ; Etenim AH ad HC minorem proportionem habebit, quam $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ numeri $5924\frac{1}{4} = 455\frac{1}{4}$, ad $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ hujus numeri $780 = 60$. seu quam $455\frac{1}{4} \times 4 = 1823$ ad $60 \times 4 = 240$. Ponatur itaque $HC = 240$, erit AH paulo minor, quam 1823 , & consequenter etiam quadratum ipsius AH paulo minus, quam 3323329 ; Item quadratum ipsius AC paulo minus, quam 3380929 , qui numerus ex quadratis numerorum 1823 , & 240 componitur; ac tandem recta AC minor, quam sit ipsius quadrati 3380929 radix $1838\frac{1}{4}$. Itaque AC ad CH minorem habet proportionem, quam $1838\frac{1}{4}$ ad 240 .

Porro dividatur angulus HAC , per rectam AK in duos æquales angulos (§. 57.) habebit se AK ad CK , sicut $AH + AC$ ad HC . Quoniam vero AH minor est, quam 1823 ; & AC minor, quam $1838\frac{1}{4}$; HC autem $= 240$; habebit $AH + AC$ ad HC , seu AK ad CK , minorem pariter proportionem, quam $1823 + 1838\frac{1}{4} = 3661\frac{1}{4}$ ad 240 ; aut quam $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ illius numeri $3661\frac{1}{4} = 1007$, ad $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ hujus numeri $240 = 66$. Dum itaque KC assumitur esse partium 66 , debet AK necessario minor esse, quam 1007 ; nec non quadratum ipsius AK minus, quam sit numerus 1014049 ; itemque quadratum ipsius AC minus numero 1018405 , qui ex additione quadratorum numeri 1007 , & 66 resultat; tandem etiam linea AC minor erit radice $1009\frac{1}{2}$, ipsius quadrati 1018405 . Ergo AC ad KC minorem utique proportionem habet, quam $1009\frac{1}{2}$ ad 66 .

Denique dividatur angulus KAC in duos æquales per rectam AL (§. 57.) erit $AK + AC$ ad KC :: AL ad LC ; & quoniam ex mox demonstratis AK minor est, quam 1007 ; & AC minor, quam $1009\frac{1}{2}$; KC vero æqualis 66 : habebit & $AK + AC$ ad KC , seu AL ad LC minorem proportionem, quam $1007 + 1009\frac{1}{2} = 2016\frac{1}{2}$ ad

ad 66. Posita itaque recta $LC = 66$, erit AL minor, quam $2016\frac{1}{2}$; & quadratum pariter AL minus, quam $4064928\frac{1}{8}$; quadratum etiam AC minus quadratis numerorum $2016\frac{1}{2}$, & 66 nempe $4069284\frac{1}{2}$; atque tandem linea AC minor radice hujus numeri, nempe $2017\frac{1}{4}$. Ergo pariter linea AC ad LC minorem habet proportionem, quam $2017\frac{1}{4}$ ad 66 ; & inverse: LC ad AC majorem habet proportionem, quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$.

Cum itaque BC sit $\frac{1}{8}$ peripheriæ (§. 286); erit GC $\frac{1}{2}$ peripheriæ, HC $\frac{1}{4}$, KC $\frac{1}{8}$, & LC $\frac{1}{8}$ ejusdem peripheriæ; atque linea LC erit simul latus polygoni nonaginta sex laterum, circulo inscripti: ideoque cum LC ad AC majorem habeat proportionem, quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$, habebunt & omnia polygoni latera, seu totus ambitus polygoni nonaginta sex laterum, majorem proportionem ad diametrum AC , quam $96 \times 66 = 6336$ ad $2017\frac{1}{4}$.

Jam vero numerus 6336 ter in se complectitur numerum $2017\frac{1}{4}$, & adhuc superest numerus $284\frac{1}{4}$, quod residuum sane plus est, quam $\frac{1}{8}$ numeri $2017\frac{1}{4}$; Etenim $\frac{1}{8}$ hujus numeri $2017\frac{1}{4}$ est $28\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, & per consequens $\frac{1}{8}$ exprimit numerum duntaxat $284\frac{1}{4}\frac{1}{2}$, qui utique minor est numero $284\frac{1}{4}$. Ergo totus ambitus polygoni 96 laterum, & multo magis peripheria circuli ter in se complectitur diametrum AC , & præterea partem, quæ adhuc major est, quam $\frac{1}{8}$. *Quod erat alterum demonstrandum.*

§. 254. **E**X Archimedæi hujus Theorematis fusiori deductione pronum est tyronibus intelligere, qua methodo *Archimedes* sit usus, ut incommensurabilitatem peripheriæ cum diametro demonstraret, & ad quam parvam differentiam limites utriusque incommensurabilitatis ingeniosissime restrinxerit, nempe ad $\frac{1}{257}$, ut ex inspectione theorematis elucet. Neque vero mathematicis inferioris ævi felicioribus esse licuit, in theorematis hujus tractatione, quam fuerit *Archimedes*;
Dd
Quam-

Quamvis enim differentiam hanc extenuaverint varii (§. 252.) nemo tamen hæcenus veram proportionem peripheriæ ad diametrum adinvenit, ut non immerito vera hæc peripheriæ circuli ad diametrum proportio hodie dum votum sit eruditorum. Mea quidem sententia, perdent & illi oleum suum atque operam, qui proportioni huic impossibili reperiundæ industriam impostero elocabunt. Quid igitur opus est provinciam incassum pertentare, quam alii quidem, & nuperime Leustnerus se absolvisse, reclamantibus summis mathematicis, arroganti supercilio, sed temere jactavit? præsertim cum minutissima differentia insensibilis sit, & inoffensam esse omnem praxim patiatur.

COROLLARIUM.

§. 255. **E**X hac diametri cum peripheria circuli incommensurabilitate deducitur, quod, ubicunque propositio aliqua ex coæquatione, aut proportione diametri cum peripheria dependet, illa sustineri possit in physico, non item in mathematico rigore.

PROPOSITIO XIV.

Tab. VII. §. 255. Circuli area ALAX equalis est triangulo rectangulo OXZ, cujus basis sit peripheria, & altitudo radius circuli OX.
Fig. 137.

Sint areæ circulorum AA, BB, CC, DD, ducatur radius ex O in X; ex X extendatur peripheria circuli ALA X usque in Z ad angulum rectum; Ex P in Q, ex S in T, ex M in N. Jam vero sic se habet PQ ad XZ, sicut se habet OP ad OX, cum triangula sint similia (§. 87.) Et sic se habet peripheria BB ad peripheriam AA, sicut se habet radius OP ad radium OX; circumferentiæ quippe sunt ut radii (§. 206.) igitur sic se etiam habebit PQ ad XZ, sicut se habet peripheria BB, ad peripheriam AA, & linea PQ se habebit ad peripheriam BB, sicut linea seu basis XZ ad peripheriam

pheriam AA. Linea autem XZ ex *hypothefi* est æqualis peripheriæ AA, & PQ æqualis BB, ST æqualis CC, MN æqualis DD. Igitur etiam area circuli AA erit æqualis triangulo OXZ. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

§. 257. *A*rea circuli se habet quam proxime ad quadratum diametri ut Tab.VII. 11 ad 14; vel ut Clariff. Wolffius afferit: ut 7850 ad 10000. Fig. 138.

Sit circulus ALAX, cujus diameter fit AA, hujus autem diametri quadratum EFHG fit circulo circumscriptum, habebit se area circuli ALAX ad quadratum diametri EFHG ut 11 ad 14. Atque hoc ab *Archimede* sic demonstratur: latus duplum GH continuetur in K, adjiciatur, & $\frac{1}{2}$ diametri = KZ, ita ut GZ ad AA vel GH se proxime habeat, ut $3\frac{1}{2}$ ad 1. Jam vero triangulum AZG est proxime æquale circulo ALAX (§. 256.) & recta GZ sic se habet ad GH, sicut triangulum AZG ad triangulum ejusdem altitudinis AHG (§. 90.) atqui trianguli AHG, quæ est quarta pars quadrati EFHG, basis GH est æqualis 7; & trianguli AZG basis GZ est proxime æqualis 22: Igitur triangulum AHG quadruplicatum, seu quadratum EFHG habet se ad triangulum AZG, & per consequens, etiam ad aream circuli ALAX proxime, ut 28 ad 22, seu ut 14 ad 11. Q. E. D.

SCHOLION I.

§. 258. *Q*uod si latus GH ponatur esse æquale 71, & GK triplo majus, adjuncto KZ proxime æquali $\frac{1}{2}1$; habebit se GZ ad GH, seu triangulum AZG ad triangulum AHG proxime, ut 223 ad 71; atque idem triangulum AZG, quod est proxime æquale circulo ALAX (§. 256.) habebit se ad quadratum GH proxime, ut 223 ad $71 \times 4 = 284$. Ex quo tamen elucet, proportionem circuli ad diametri quadratum in hac secunda positione esse paulo majorem, quam

223 ad 284, quemadmodum in prima positione erat proportio paulo minor, quam 11 ad 14. Quod si $\frac{2}{3}\frac{3}{4}$ subtrahatur ab $\frac{1}{4}$, deprehendetur minutissima differentia, inter aberrantem utramque proportionem intercedens, nempe $\frac{1}{19}\frac{2}{78}$, seu $\frac{1}{1918}$.

SCHOLION II.

§. 259. **O**pe folius arithmeticae demonstratio praecedentis theorematis fit hoc modo; diameter AA vel latus GH ponatur esse æquale 7; semidiameter vero AO = $3\frac{1}{2}$, & latus GZ = 22. Quadratum lateris GH $7 \times 7 = 49$ & basis GZ multiplicata per altitudinem AG, id est $22 \times 3\frac{1}{2} = 77$; cujus numeri 77 medietas $38\frac{1}{2}$ dat aream trianguli AZG (§. 169.) vel aream circuli ALAX (§. 256.) Igitur circulus ALAX se habet ad quadratum diametri EFHG, sicut $38\frac{1}{2}$ ad 49; id est, cum uterque numerus per 7 dividitur, ut $5\frac{1}{2}$ ad 7; seu ut 11 ad 14.

Porro ponatur diameter AA, vel latus GH = 71; semidiameter autem AO = $35\frac{1}{2}$, & latus GZ = 223: igitur quadratum lateris GH $71 \times 71 = 5041$; & basis GZ multiplicata per altitudinem AG, id est $223 \times 35\frac{1}{2} = 7916\frac{1}{2}$, cujus medietas nempe $3958\frac{1}{4}$ dat aream trianguli AZG (§. 169.) vel aream circuli ALAX (§. 256.): Ergo circuli area ALAX habet proportionem ad quadratum diametri EFHG, sicut $3958\frac{1}{4}$ ad 5041; seu, utrumque per 4 multiplicando, ut 15833 ad 20164, id est, dividendo utrumque per 71, ut 223 ad 284. *Quod erat demonstrandum.*

PROPOSITIO XVI.

§. 260. **I**n equalibus circulis, aequales anguli, equalibus peripheriis insistant, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant. *Eucl. III. 26.*

Nam

Nam anguli super eodem circuli segmento sunt inter se æquales, quorum vertex ad quodlibet peripheriæ punctum pertingit (§. 247); atqui angulus super eodem circuli segmento ductus ad centrum, duplus est anguli super eodem segmento ducti ad peripheriam (§. 244.) ergo etiam æquales anguli, seu ad centrum seu ad peripheriam ducti, æqualibus segmentis seu peripheriis insunt. Q. E. D.

SCHOLIUM.

§. 261. **Q**Uamvis itaque arcus AF, & FD, qui æquales *Tab. VII.*
 angulos ABF, & FBD subtendunt, inter se *Fig. 139.*
 æquales sint; pars tamen chordæ AC non est æqualis parti chordæ CD æqualem angulum subtendenti: sed hæc duæ partes chordæ AC, & CD sunt lateribus AB, & DB proportionales, id est: AB. DB :: AC. CD. Nam protendatur recta DB in E, fiatque BE = AB. Jam DB, DC, BE, CA sunt quatuor proportionales (§. 40). atqui AB = BE: ergo etiam BA. AC :: DB. CD. vel: AB. DB :: AC. CD. Hoc theorema omnibus omnino triangulis applicatur; ita, ut si angulus trianguli bifariam secetur, secans autem recta linea secet quoque basim, habebunt bases segmenta eandem omnino inter se rationem, quam habent reliqua ipsius trianguli latera: *Eucl. VI. 3.*

PROPOSITIO XVII.

§. 262. **A**ream circulem DEFG, cujus diameter DF sit = 4. *Tab. VII.*
 ped., sternere oporteat quadris lapidibus, quorum singuli *Fig. 140.*
 unum pedem quadratum contineant. *Quæritur: quot lapides pro hoc ly-*
thostroto sint necessarii?

Fiat proportio: sicut quadratum diametri = 14 ad aream circuli = 11 (§. 257). ita quadratum diametri DF 4 ped. = 16, ad aream circuli DEFG. Jam $16 \times 11 = 176$. hæc 176 dividantur per 14, factum prodibit $12\frac{2}{4}$, vel $\frac{4}{1}$. tot quippe quadrati lapides unius pedis erunt necessarii pro area illa circulari sternenda.

§. 263. **Q**Uam veritatem ipsis oculis in figura intueri licet; quatuor enim integri lapides medium circuli occupant, qui una cum aliis 8 mediis lapidibus constituunt 8 integros lapides, & internam majorem explent quadraturam. Restant igitur adhucdum $4\frac{1}{2}$ lapides quadri pro cæteris circumpatentibus circuli explementis. Pro segmento comprehendente tres areolas ABC insumatur $1\frac{1}{2}$ lapis; per consequens quatuor ejuscemodi hiantia segmenta explebuntur $4\frac{1}{2}$ lapidibus quadris. Qua autem ratione ex $1\frac{1}{2}$ lapide refecentur tres areolæ ABC, exhibet minor figura. Porro utne necessum sit areolam B ex pluribus componi fragmentis, assumatur $1\frac{1}{2}$ lapidis loco $1\frac{1}{2}$ pro explendo uno ejuscemodi segmento trium areolarum, ita ut universim pro lythostroto hoc circulari 14 lapides unius quadrati pedis insumantur; atque tum etiam areola B ex una integra lapidis constabit parte.

PROPOSITIO XVIII.

Tab. VII. §. 264. *Centrum cujusvis arcus invenire.*
Fig. 141.

Sit arcus AB. cujus centrum quæretur; pone itaque circini pedem in A, fac arcus tam superne quam inferne versus C, mox transfer eandem circini aperturam in B, & duc arcus tam superne, quam inferne in D. Rursus eandem circini aperturam depone in G (est autem $AG = BE$) & ex G pariter duc arcus in C, & C, uti & ex E in D & D. Per puncta intersectionum C, & C, item D, & D ducantur rectæ; & punctum I, in quo rectæ concurrunt, erit centrum arcus AB.

PROPOSITIO XIX.

§. 265. *Circuli superficiem invenire.*

Inveniatur primum circuli peripheria (§. 252). idque per regulam *Trium*: sicut se habent 113 ad notam diametrum, ita se habent 355 ad ignotam peripheriam (§. 79 *Arith*). Cum inventa peripheria multiplicetur quarta diametri

tri pars ; aut cum tota diametro multiplicetur quarta peripheriæ pars ; aut denique cum media diametro multiplicetur media peripheria : Factum ex quacunq. harum trium operationum proveniens dabit circuli superficiem proxime veram (§. 255).

Quod si neque diameter, neque peripheria, aut in duo, aut etiam in quatuor possit dividi ; multiplicetur diameter tota cum tota peripheria, & factum proveniens dividatur per 4: Quotus e divisione proveniens pariter exprimet proxime veram circuli superficiem.

§. 266. Superficiem *segmenti* cujusdam circuli persæpe expedit indagari ab illis, qui agros alluentibus fluminibus conterminos metiuntur ; (§. 136). Neque enim ejusmodi superficies negligitur sine jactura ; ut autem & brevissime, & qua licet, securissime superficies *segmenti* circuli inquiratur, visum est sequentem tabellam adjicere, qua gradus circuli in partes lineæ rectæ commutantur. Sit circuli diameter partium 10000

| Secunda | Partes Peripheriæ | Minuta | I | - | - | - | I4. |
|---------|-------------------|------------------|----|---|---|---|------|
| 2 | - - - | $\frac{1}{2}$. | 2 | - | - | - | 29. |
| 3 | - - - | $\frac{1}{2}$. | 3 | - | - | - | 43. |
| 4 | - - - | 1. | 4 | - | - | - | 58. |
| 5 | - - - | 1. | 5 | - | - | - | 72. |
| 6 | - - - | 1. | 6 | - | - | - | 87. |
| 7 | - - - | $1\frac{1}{2}$. | 7 | - | - | - | 101. |
| 8 | - - - | $1\frac{1}{2}$. | 8 | - | - | - | 116. |
| 9 | - - - | 2. | 9 | - | - | - | 130. |
| 10 | - - - | 2. | 10 | - | - | - | 145. |
| 20 | - - - | 4. | 20 | - | - | - | 290. |
| 30 | - - - | 7. | 30 | - | - | - | 436. |
| 40 | - - - | 9. | 40 | - | - | - | 581. |
| 50 | - - - | 12. | 50 | - | - | - | 727. |

| Gradius | Partes Peripheriæ | | |
|---------|-------------------|-----|---------------|
| 1 | - - - 872. | 60 | - - - 52359. |
| 2 | - - - 1745. | 70 | - - - 61086. |
| 3 | - - - 2617. | 80 | - - - 69813. |
| 4 | - - - 3490. | 90 | - - - 78539. |
| 5 | - - - 4363. | 100 | - - - 87266. |
| 6 | - - - 5235. | 110 | - - - 95993. |
| 7 | - - - 6108. | 120 | - - - 104719. |
| 8 | - - - 6981. | 130 | - - - 113446. |
| 9 | - - - 7853. | 140 | - - - 122173. |
| 10 | - - - 8726. | 150 | - - - 130899. |
| 20 | - - - 17453. | 160 | - - - 139626. |
| 30 | - - - 26179. | 170 | - - - 148353. |
| 40 | - - - 34906. | 180 | - - - 157079. |
| 50 | - - - 43633. | 360 | - - - 314159. |

Cujus quidem tabulæ usus opportune dato in problema te elucebit.

Tab. VI. Sit invenienda superficies segmenti HGF. Invenia-
Fig. 127. tur primum hujus segmenti centrum D (§. 264). atque ex hoc
 centro D describatur circulus BAGFH. cujus diameter BF
 = 264 ped. mox ope transportatorii mensurentur gradus seg-
 menti GFH = 88. Quibus gradibus in tabula præmissa cor-
 respondet numerus 69813 + 6981 = 76794. Jam fiat regu-
 la proportionis.

$$\begin{array}{r}
 100000 \quad \text{---} \quad 76794 \quad \text{---} \quad 264 \\
 \quad \quad \quad 264 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 307176 \\
 \quad \quad \quad 460764 \\
 \quad \quad \quad 153588 \\
 \hline
 20273616 \quad \Big| \quad 202 \quad \frac{73616}{100000}
 \end{array}$$

Itaque 88 gradus $= 202 \frac{7}{8} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6}$ ped. Jam quærat^{ur} tota superficies circuli BAGFH (§. 265). ducanturque ex centro D rectæ in G & H; ac quærat^{ur} etiam superficies sectoris HDGF adhibita Regula proportionis: sicut se habent 360 ad totam superficiem circuli, ita se habebunt 88 ad superficiem sectoris HDGF. Porro inventa superficies trianguli DGH subtrahatur ab inventa superficie sectoris HDGF, & residuum dabit superficiem segmenti HGF. Q. E. F.

PROPOSITIO XX.

§. 267. *Circuli inter se sunt in ratione duplicata radiorum.*

Nam circuli sunt polygona infinitorum laterum, seu continent infinita triangula (§. 340). atqui triangula habent se in duplicata ratione laterum homologorum, seu ut quadrata laterum (§. 92 & 88): igitur & circuli se habebunt ad invicem in duplicata ratione radiorum, seu ut radiorum quadrata. Q. E. D.

COROLLARIUM.

§. 268. *Quoniam peripheriæ circularum, ceu polygonorum regularium similium, habent se ut radius ad radium (§. 206), radius se autem habet ad radium in duplicata ratione; igitur & peripheriæ se habebunt ad invicem in duplicata ratione. adeoque peripheriæ se habebunt ut radii; imo etiam arcus circularum, qui sunt peripheriæ partes, habebunt se ut radii circularum.*

PROPOSITIO XXI.

§. 269. *Circulus AGC, habens pro diametro hypotenusam AC trianguli rectanguli, equalis est duobus aliis circulis ADB, & Fig. 142. BEC, quorum alter cathetum AB, alter basim BC ejusdem trianguli pro diametro habet.*

E e

Ete-

Etenim circuli se habent ad invicem ut quadrata radio-
rum (§. 267), seu etiam diametrorum; atqui quadratum hy-
pothenusæ AC est æquale quadratis catheti AB, & baseos
BC §. (96, & 99.) Igitur & circulus $AGC = ADB + BEC$.
Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

Tab. VII. §. 270. *Chorda HL, & CF, qua similes arcus subtendunt; Item
Fig. 143. sinus HO, & CD; tangentes item KG, & EB, atque
etiam secantes IG, & AB (§. 4. & (æqq. Trigon.) habent se ad invicem
sicut arcus HKL, & CEF.*

Primo. Tot æque gradus intercipit angulus HIL, quot
angulus CAF *per hypotesim*; igitur hi duo anguli sunt æqua-
les: sed cum latus $AC = AF$, & $IH = IL$, propter æ-
qualem radium, erit utrumque triangulum CAF, & HIL
Isoceles, & anguli C, F, H, L erunt æquales (§. 93). Igi-
tur triangula CAF, & HIL erunt & æquiangula, & similia
(§. 88). & radius, seu latus IL, sic se habebit ad triangulum
HIL, sicut AF ad triangulum CAF: atqui radius seu latus
IL. AF :: HKL. CEF (§. 206). ergo etiam latus HL. CF ::
HKL. CEF.

Secundo. Chorda HL se habet ad chordam CF, ut arcus
HKL ad arcum CEF *juxta mox dicta*; sed sinus HO, & CD
est chorda dimidia (§. 5. *Trigonom.*); item HK est medius arcus
HKL, & CE est medius arcus CEF, cum angulum medium
HIL, & CAF mensurent; ergo etiam HK. CE :: HO.
CD. (§. 2. *Axiom. 5.*)

Tertio, Quoniam angulus HIK tot gradibus mensuratur,
quot gradibus angulus CAE *per hypotesim*, erit $HIK = CAE$;
& quoniam angulus GKI, & BEA est rectus (§. 9. *Trigonom.*)
erit etiam angulus $GKI = EBA$ (§. 77.) igitur triangula GI
K, & BAE sunt similia: igitur etiam $KG. EB :: KI. EA$;
& $KI. EA :: KH. EC$. (§. 206.) ergo etiam tangens $KG. EB$
:: $KH. EC$.

Quar-

Quarto demum: in similibus triangulis GIK, & BAE sicut GI ad BA, ita KI ad EA; atqui KI. EA :: KH. EC: ergo etiam secans GI. BA :: KH. EC. *Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIUM.

§. 271. **Q**Uamvis itaque chordæ sint ut arcus, id tamen fo-
 lenter est advertendum: dum plures chordæ mi-
 nores eundem arcum subtendant, quem etiam una chorda major
 totum subtendit, tunc chordam illam majorem non se habere
 ad chordas minores, sicut arcus major ad arcus minores. Ita-
 que chordæ quidem MN, ST se habent ut arcus MXN, &
 SZT; attamen chordæ $MX + XN > MN$: uti & chordæ $SZ + ZT > ST$ (§. 12.) cum tamen arcus $MX + XN = MXN$,
 & arcus $SZ + ZT = SZT$; habent se quippe minores
 arcus tanquam medium majoris.

PROPOSITIO XXIII.

§. 272. *Polygona regularia circulo inscripta, quo plura habuerint latera, eo quoque majorem habebunt circuitum majorumque su-
 perficiem.* Tab. VII. Fig. 144-

Sit Pentagonum ABCDE circulo inscriptum: sit & in-
 scriptum decagonum AKBI &c. spatium arcus EFA est
 quinta circuli pars: linea recta EA est latus seu quinta pars
 Pentagoni; & duæ lineæ rectæ concurrentes EF, AF sunt
 quinta pars decagoni; sed quinta pars decagoni, nempe rectæ
 lineæ EF + FA, est majoris circuitus, quinta pars Pentago-
 ni, nempe recta EA (§. 12): Igitur etiam totus circuitus de-
 cagoni major erit circuitu Pentagoni. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

§. 273. *Polygona regularia, qua fuerint circulo circum scripta, quo pau-
 ciora latera habuerint, eo majorem habebunt circuitum, & Fig. 145-
 superficiem.* Tab. VII.

Sit Pentagonum $ABCDE$ circulo circumscriptum, sit & circumscriptum eidem circulo decagonum EFK &c. $EF + FK$ est quinta pars decagoni: & $EF + FA + AK$ est itidem quinta pars Pentagoni; sed quinta pars decagoni $EF + FK < EF + FA + AK$, quæ est quinta pars pentagoni; cum $EF + FA + AK$ major circuitus sit, quam $EF + FK$ (§. 12.) Ergo etiam totum pentagonum circulo cum paucioribus lateribus circumscriptum, majorem habet peripheriam, majoremque superficiem, quam circumscriptum decagonum cum pluribus lateribus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

Tab. VII. §. 274. Fig. 146. \int *Inea disposita pro circuli peripheria plus spatii complectitur, quam β . eadem linea in quadrati snisset figuram coordinata.*

Sit linea disposita in circulum $ABCD$, & eadem linea coordinata in quadratum $EFGH$. Jam vero superficies circuli est proxime æqualis triangulo rectangulo, cujus basis sit peripheria $ABCD$, & altitudo radius KD (§. 256.) Quadratum verò $EFGH$ æquivalet triangulo rectangulo; cujus basis sit $EFGH = ABCD$, & altitudo KM ; sed KD majus, quam KM : igitur etiam triangulum, quod supra eandem basim habet altitudinem KD majus est, quam triangulum habens altitudinem KM (§. 89.) Igitur etiam linea disposita in peripheriam plus spatii complectitur, quam eadem linea disposita in quadratum. Q. E. D.

SCHOLION.

1. 275. Q uod de quadrato mox dictum est, intelligi etiam debet de omni altera figura polygoni regulari. Atque ex hoc deducitur: circulum omnium figurarum Isoperimetrarum maximum spatium complecti.

PROPOSITIO XXVI.

§. 276. *Circulum multiplicare.*

Assumatur diameter circuli multiplicandi, atque ex hac diametro, tanquam uno latere constituatur quadratum. Rursus hujus quadrati diagonalis assumatur, atque constituitur pro diametro circuli, circulus iste erit duplus alterius.

Nam cum circuli sint in ratione duplicata radiorum, seu ut illorum quadrata (§. 267.), quod tradit *Eucl. Lib. XII. Prop. 2*; radius autem, seu semidiameter multiplicati circuli major sit $\frac{1}{2}$, quam semidiameter circuli multiplicandi (§. 315.) erit & totus circulus multiplicatus duplo major circulo multiplicando. Quod si cupias circulum triplicare, aut quadruplicare, quære diametrum triplicandi vel quadruplicandi circuli in diagonalibus quadrangulorum multiplicandorum (§. 221.)

PROPOSITIO XXVII.

§. 277. *Triangulum æquilaterum circulo inscribere.*

Ducta per circulum diametro BD, cape semidiameterum GD, hujusque intervallum primo transfer ex D in C; *Ta. VIII. Fig. 147.* tum in E, inde in B; porro in F, & A. Itaque si ex C in B rectam duxeris, ex B in A, ex A in C, habebis triangulum æquilaterum: Quod si vero ex proximo puncto ad proximum rectam duxeris, veluti ex D in C, ex C in E, ex E in B &c. habebis hexagonum regulare; Namque latus hexagoni, circulo inscripti, est circuli radius.

§. 278. **A** Ut radium GD divide in duas partes æquales in R, per punctum R duc rectam lineam AC, cui diameter BD sit perfecte perpendicularis: mensura lineam AC, eamque transfer ex C in B, ex B in A, & idem omnino triangulum confecisti.

PROPOSITIO XXVIII.

Ta. VIII. §. 279. Circulo quadratum inscribere.

Fig. 148.

Per centrum E duc diametrum CD ; tum ex centro E erige perpendicularem EA , (§. 24.) eamque rectam ex centro E in B demitte; habebis itaque circulum quadrifariam divisum. Jam si ex puncto A in C , ex C in B , ex B in D , ex D demum in A rectas duxeris, habebis quadratum petitum circulo inscriptum.

§. 280. **Q**uod si quadratum circulo circumscribere velis, per eadem reperta puncta A, D, B, C duc tangentes FG, GI, IH, HF , quæ tangentes diametris CD , & AC fiat parallelæ: FG , & HI ipsi CD : & FH, GI ipsi AB . Eritque $FGIH$ quadratum circulo circumscriptum.

PROPOSITIO XXIX.

Ta. VIII. §. 281. Pentagonum æquilaterum inscribere circulo.

Fig. 149.

Fiat circulus ABC . Cujus diametro radius DB rectus insistat, radius DC in duas partes dividatur, ita ut D $F=FC$. Ex F , radio FB ducatur circulus EBG , fiatque ex E recta in B , hæc recta EB erit latus Pentagoni circulo ABC inscribendi, quod Pentagonum exprimitur literis $BLHKO$.

Fig. ead. §. 282. **S**I forte Pentagonum regulare circulo circumscribere oporteat; inscribatur primum circulo pentagonum modo mox insinuato; tum per puncta $BOKHL$ ducantur tangentes SM, MN, NR, RT, TS , in punctis SM, N &c. in quibus tangentes concurrunt, formabitur pentagonum circulo circumscriptum. Nam angulus $LDX = XDB$ (§. 81.) & ob eandem rationem angulus $XDB = BDP$. Ergo etiam angulus $LDB = XDP$ (§. 2. Axiom. V.) ergo pariter angulus $SDM = LDB$, & per consequens omnia alia latera trianguli circumscripti S, M, N, R, T habent æquales ad
cea-

centrum D angulos ipsis angulis laterum pentagoni circulo inscripti: igitur pentagonum inscriptum, & circumscriptum sunt inter se similia (§. 88.) igitur, & regularia.

§. 283. **A** Ut inscribatur primum pentagonum regulare BCDEF circulo; tum fiant lateribus inscriptis BC, CD, DE, EF, FB parallelæ KL, LM, MN &c. quæ parallelæ tangant circulum in unico puncto peripheriæ, dabuntque puncta concurrentium parallelarum KLMNO pentagonum circulo circumscriptum, simile ipsi pentagono inscripto BCDEF. *Ta. VIII. Fig. 150.*

§. 284. **Q**Uod si demum datum sit pentagonum BCDEF, cui circumscribi debeat circulus, cujus centrum sit ignotum; Quæraturo primo centrum pentagoni hoc modo: posito circini pede in E fiant ad arbitrium intervallum arcus in O, & Z; tum posito circini pede in D cum eadem apertura in O, & Z; item in G, & X. Sic pariter ex C arcus in G, & X conjungantur; per puncta intersectionum ZO, item XG ducantur rectæ, atque in puncto A concurrentium rectarum erit centrum pentagoni BCDEF. Itaque ex hoc centro A, radio AD, describatur circulus, hic pentagonum BCDEF exactissimum circumscribet.

SCHOLION.

§. 285. **H**Ac eadem ratione centra aliarum quarumque figurarum regularium deteguntur v. g. trianguli ABC. Servata eadem semper circini apertura, ex centris A, B, C ducantur arcus versus N, & O; item versus S, & M. Per puncta intersectionum NO, item SM ducantur rectæ, atque in puncto G, in quo hæ rectæ concurrent, habebitur centrum quæsitum trianguli regularis ABC. Idemque fiat cum aliis figuris. *Ta. VIII. Fig. 147.*

PROPOSITIO XXX.

Ta. VIII. §. 286. Hexagonum circulo inscribere.

Fig. 151.

Ducatur per circulum diameter AB, positoque circini pede in B, intervallo semidiametri GB, ducatur arcus CD. Servata eadem circini apertura describatur ex centro A arcus FE: ubi puncta AEDBCF lineis rectis copulata fuerint, habebitur hexagonum circulo inscriptum, cujus unum latus æquale sit semidiametro illius circuli, cui hexagonum inscriptum est.

SCHOLION I.

§. 287. **Q**uod si hexagonum circulo circumscribere oporteat procedatur juxta doctrinam (§.282. vel §.283.)

SCHOLION II.

Ta. VIII. §. 288.

Fig. 147.

Aliter hexagonum circulo inscribitur, si nempe latus unum trigoni inscripti v. g. AC ex centro G per punctum M in duas æquales partes dividatur; recta GD dividens in puncto D dabit latus hexagoni AD vel DC &c. Eadem prorsus ratione ex quadrato octogonum, ex pentagono decagonum, ex hexagono dodecagonum præparatur.

PROPOSITIO XXXI.

§. 289. *Qualicumque polygonum regulare cuicumque circulo inscribere.*

Circuli totius 360 gradus dividantur per latera polygoni inscribendi (§. 41. *Arithm.*) veluti si inscribendum sit trigonum, dividantur 360 per 3, quotus erit 120; tot itaque gradus per chordam subtendantur ope *transportatorii* (§. 108.) Hæc chorda erit latus trigoni, cui si aliæ duæ intra peripheriam circuli adjungantur, habebitur Trigonum petitum. Hac prorsus ratione aliorum quorumque polygonorum v. g. pentagoni latera reperiuntur. 360 dividantur per 5, quotus erit

72. igitur chorda, 72 gradus subtendens, erit latus pentagoni. &c

SCHOLIION.

§. 290. **A**liter quodcunque polygonum circulo inscribitur ope *circini proportionalis* (§. 116.) hoc modo: longitudo semidiametri illius circuli mensuratur circino communi manuali; hoc circini manualis intervallum transfertur in circinum proportionalem ita, ut utrumque crus manualis circini tangat in utroque crure circini proportionalis numerum 6 lineæ polygonalis. Circulo itaque proportionali in hac divaricatione constituto, si lubeat circulo aut heptagonum aut nonagonum aut quodcunque aliud inscribere, adhuc bito circino manuali defumatur distantia 7 & 7, vel 9 & 9 utriusque cruris circini proportionalis, hæcque distantia circulo tamquam latus inscribatur, exhibebitque quodcunque postulatum polygonum.

PROPOSITIO XXXII.

§. 291. **T**ria data puncta, aut triangulum quodvis circulo inscribere. *Ta. VIII. Fig. 152.*
 Sint data tria puncta, seu triangulum ABC circulo inscribendum; erigantur super latera AB, & BC perpendiculares GG, & FF, in puncto intersectionis L habebitur commune horum laterum AB, & BC centrum L (§. 284.) Ex hoc centro L, radio LA, describatur circulus, eritque triangulum ABC ita circulo inscriptum, ut singula puncta ABC circuli peripheriam contingant.

PROPOSITIO XXXIII.

§. 292. **M**ajoris circuli arcum AMBNC, aut etiam totum circumulum *Ta. VIII. Fig. 153.*
sine ullo assumpto centro efformare.

Sint tria duntaxat puncta ABC cognita, quæ formandi circuli peripheriam contingant, neque etiam sit possibile ex
 Ff datis

datis his tribus punctis juxta (§. 291.) centrum aut invenire; aut eo uti: igitur assumantur duæ regulæ lineæ, hujusque alterius extremitas ad alterius extremitatem firmiter compingatur, ita, ut angulum obtusum proportionatum tribus punctis datis $A B C$ exhibeant. In punctis $A B C$ figantur aculei, quibus regulæ compositæ ita applicentur, ut ad punctum B obtusangulus constituatur. In extremitate B regularum compositarum infigatur cerussa, atque ad contactum A , & C fiant in regulis notæ. Quod si compositæ hæ regulæ primum ita collocentur, ut altera extremitas sit in X , obtusus angulus in A , altera vero extremitas in C , sique obtusus hic angulus ex A per B in C sic promoveatur, ut hæ duæ compositæ regulæ tandem figuram $A C Z$ exhibeant, habebitur a cerussa in obtusangulo constituta descriptus arcus $A M B N C$. Eadem prorsus ratione ex C arcum licebit persequi, donec totus circuli ambitus confurgat.

Nam si circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excutetur, in excitata erit centrum circuli. Idem fiet, si tangens punctis A & C applicetur.

PROPOSITIO XXXIV.

Ta. VIII, §. 293. Figuram ovalem $A C B F E$ describere.
Fig. 154.

Per formatum quemcunque circulum ducatur diameter $A B$, uti & altera diameter perpendicularis $C D$; ex puncto A per D protende lineam rectam in F ; similiter etiam ex B in E . Tum posito circino in A , intervallo $B A$ duc arcum ex B in F , & iterum, servata eadem apertura circini, posito uno pede in B , duc arcum $A E$; demum posito circini pede in D , duc arcum ex E in F , habebiturque figura ovalis petita.

PROPOSITIO XXXV.

Ta. VIII, §. 294. Cochleam seu lineam volutam delineare.
Fig. 155.

In

In puncto C rectæ lineæ A B ponatur circinus, fiatque semicirculus DE; tum posito circini pede in D, radio DE, continuetur alter semicirculus ex E in F. Rursum deponatur circulus in C, fiatque radio CF semicirculus ex F in G, & sic porro, habebiturque cochlea producta.

PROPOSITIO XXXVI.

§. 295. *Volutam architectonicam formare.*

Sit linea A B, super hanc demittatur perpendicularis Q O. Tum circini pede constituto in C describatur circulus D D D D. Hinc circulo inscribatur quadratum rectangulum (§. 279.) Singula hujus quadrati latera per duas rectas dividantur in duas æquales partes in 9, 10, 11, 12. Quælibet harum duarum transversalium linearum dividatur in 6 partes æquales, atque his partibus numeri, in orbita se consequentes, inscribantur, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Tum circini uno pede posito in 1, ducatur quadrans circuli, nempe arcus DE; iterum posito circino in 2 describatur arcus, EF, rursus ex 3 describatur arcus FG &c. Quod si itaque per illos 12 numeros. subsequentes ducantur continui quadrantes, habebitur descripta voluta architectonica.

Ta. VIII.
Fig. 156.

DEFINITIO.

§. 296. **C**YCLOIS est linea curva, que ab assumpto peripheria circuli puncto describitur, cum circulus ille super recta linea volutatur.

Talis curva describitur, cum circulus DCH lineam re-
ctam DF contingit in puncto D, atque super hac recta DF re-
volvitur, donec punctum contactus D in sublime E extollatur, ac demum continuato motu punctum D usque in F per-
veniat. Galileus primus hanc curvam lineam, ut auctor est
Torricellius, speculatus est circa annum 1599, eique cycloidis
nomen imposuit.

Ta. VIII.
Fig. 157.

§. 297. **C**irculus, ex cujus revolutione hæc curva lineæ fit, dicitur *circulus generator*. Linea recta emensa DF dicitur *basis*. Ex bissectæ lineæ DF puncto A linea perpendicularis erecta AE dicitur *axis vel altitudo cycloidis*. Punctum E dicitur *vertex*. Punctum D denique, quod curvam describit, *punctum lineans* vocatur.

§. 298. **E**X hac cycloidis definitione colligitur, quod basis DF integræ peripheriæ circuli ALEG æqualis sit; media vero linea DA mediæ peripheriæ ALE. Item quod arcus BClinæ rectæ BD, quam delineavit, æqualis sit. Si media cycloidis pars DE basi D applicetur, & lineam curvam DXI constituat, atque pendulum circa IXD involutum versus E promoveatur, ut filum tendat, describetur cyclois DCE æqualis alteri DXI.

Ta. VIII. §. 299. Fig. 58. **P**Ræcipuæ cycloidis proprietates sunt *prima*: quod, si inter basim AB & verticem cycloidis C circulus generator constituitur, atque e quovis cycloidis puncto v. g. ex E linea recta, axi CZ perpendicularis, basi autem AB parallela ducatur v. g. EG, NS &c. Tunc recta ordinata ED, circuli peripheriæ occurrens, æqualis sit arcui DC. Quod non eveniret in figura circulari tota OCP; ordinata quippe MS major est, quam sit arcus CH. Ex hoc quoque habetur, *Fig. 57.* quod recta ex puncto circuli genitoris B ad punctum C ducta, ubi nimirum circulus cycloidem secat, perpendicularis sit ad arcum cycloidis DCE, aut ad tangentem, quæ per idem cycloidis punctum duceretur; parallela autem sit recta IBC, ad rectam AL.

Fig. 58. *Secunda* proprietas est: quod tangens quæcunque cycloidis sit parallela chordæ, quæ ex vertice cycloidis ducitur ad interfecantem; sic UX parallela est chordæ DC; item tangens FK parallela est chordæ MC.

Tertia proprietas est, quod arcus quicunque cycloidis sit
duplus

duplus chordæ, ex vertice cycloidis, ad ordinatam intraperipheriam circuli ductæ; sic arcus EC duplus est chordæ DC: imo media ipsa cyclois AC dupla est diametri ZC. Atque exinde quarta cycloidis proprietas scaturit: quod nempe linea curva cycloidalis ACB sit quadrupla diametri genitoris CZ; Tota vero cyclois ACB tripla sui circuli genitoris ZDC.

PROPOSITIO XXXVII.

§. 300. *Cycloidem delineare.*

Linea recta quæcunque assumpta pro basi v. g. DF dividatur in 22 partes æquales, e cujus medio, centro A erigatur perpendiculariter diameter circuli genitoris AE (§. 24); quæ, cum peripheria circuli genitoris nempe recta DF sit = 22, debet esse = 7 (§. 253.) Perpendicularis AE continetur in I, ita ut AI = $6\frac{1}{2}$. Tum posito circini pede in E, intervallo 8 partium baseos DF, fiant sectiones in C & M; Ex puncto I, radio IE ducatur arcus CEM, atque ex C, & M ducantur rectæ in I nempe CI, ML. Rursus ex C, & M, intervallo $4\frac{1}{2}$ partium baseos, fiant intersectiones in S, & N. Porro assumatur ope circini manualis intervallum 10 partium baseos, atque hoc intervallum ex punctis S, & N transferatur in puncta X, & Z duarum rectarum CI, & MI. Quod si itaque ex punctis intersectionum O, & K, radio DO vel KF ducantur arcus DS, & NF; item ex punctis X, & Z, radio XS vel ZN ducantur arcus SC, & MN; Denique ex puncto I, radio CI, vel IM, vel IE ducatur arcus CEM, habebitur linea cycloidalis DEF. Fig. 157.

SCHOLIUM.

§. 301. *V*ides, curvam lineam cycloidalem CEM esse sphaericam, ex centro enim I, stabili radio, efformatur; at, vero ex C, & M continuatam eandem curvam versus D, & F continuo deficere, fierique contractiorem, quemadmodum & ipsi radii arcuum ex centris X, Z, & O, K continuo

nuo redduntur breviores. Atque hanc de cycloide notitiam persequi, e re esse visum est; tum quod in civili architectura pro construendis depresso fornicibus deserviat; tum maxime, quod theoria cycloidis ad oscillationem pendulorum determinandam plurimum conducatur. De quo in *Physica* disputatur.

§. 302. **A** Liæ præterea sunt curvæ lineæ, quæ variis confectionibus efformantur; de his infimo Geometriæ loco agetur.

C A P U T VIII.

De variis Epipedometriæ speciebus.

§. 303. **P**erpetua Quantitatis continuæ cum discreta, seu numerorum cum lineis, & superficiebus intercedit analogia; ut omnino, quemadmodum in Arithmetica quatuor vulgares numerorum species recurrunt, nempe *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*: ita, & in lineis ac superficiebus quatuor illæ species usurpentur. Quæ quidem omnia adductis Problematis illustrare convenit. Velim autem ejusmodi praxea Geometriæ Tyronibus sæpius adiri; Et quamvis nonnulla in eis oggerantur, quæ mathematicum rigorem non omnino sustineant, veluti illa circuli cum quadrato commensuratio, physice tamen vera sunt, atque intellectum in figurarum atque superficierum æstimatione magnopere excolunt.

PROBLEMATA ADDITIONIS.

PROBLEMA I.

§. 304. **D**uo Triangula æquilatera ita sibi invicem addere, ut exinde tertium triangulum æquilaterum consurgat.

Resolutionem, quadratis etiam, & circulis deservientem vide (§. 222.)

PRO-

PROBLEMA II.

§. 305. *T*riangulum scalenum ACB, *cujus altitudo CD fit 12 digitorum, & alterum triangulum scalenum EFG, cuius altitudo FO fit 9 digitorum ita sibi addere, ut tertium triangulum, eisdem scalenum ALO proveniat, cuius altitudo LM fit 18 digitorum,* *Tab. VIII. Fig. 159.*

Triangulum minus EFG reducatur ad altitudinem majoris trianguli ACB (§. 330), ita ut $OCG = EFG$; Tum basis AB, & OG redigantur in unam, habebiturque triangulum $AFG = ACB + EFG$. Porro latus AF protendatur in L, donec nempe altitudo LM fit 18 digitorum, & fiat triangulum $ALO = AFG$ (§. 330), eritque scalenum $ALO =$ duobus scalenis ACB, EFG. Q. E. F.

PROBLEMA III.

§. 306. *H*exagonum regulare X, & Pentagonum regulare Z insimul addere, atque horum ex additione producere pentagonum regulare R, duobus præcedentibus æquale, *Tab. VIII. Fig. 160.*

Ex hexagono regulari X fiat parallelogrammum ABLM (§. 334.) Ex pentagono pariter Z fiat alterum parallelogrammum EFWU (§. 335.) Tum parallelogrammum ABML reducatur ad altitudinem EU quærendo quartam proportionalem SE (§. 40, & 41.) ad quam sic se habeat BL, sicut se habet EU ad AB. Quartæ proportionali SE adjungatur EF; Et $SF \times FW$ fiat parallelogrammum SFWU, ita ut $SFWU = ABML + EFWU$. Tandem inter SE, & EF quærat media proportionalis OP (§. 39.) quæ latus præbebit quæsitto pentagono regulari R. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

§. 307. *T*riangulum ABC, & Trapezium HEFG addere, ut alterum Trapezium LMNO simile priori producatur. *Tab. IX. Fig. 161.*

Trian,

Triangulum ABC reducatur ad altitudinem trapezii HEFG (§. 330), ita ut $AKL = ABC$. Trapezium quoque HEFG reducatur ad æquale triangulum IFG (§. 329); addatur alterum triangulum AKL, & habebitur triangulum IFU æquale duobus additis; nam $FGU = AKL$ (§. 91). Ex triangulo IFG fiat æquale parallelogrammum IMNG (§. 328), itemque ex triangulo IFU æquale parallelogrammum IMOU §. eodem. Parallelogrammum IMNG reducatur ad latitudinem baseos HG, quærendo quartam proportionalem, ac dicendo: sicut se habet HG ad IM; ita MN ad GP (§. 40 & 41) & habebitur parallelogrammum RHGP. Parallelogrammum quoque IMOU ad altitudinem GP reducatur, quærendo quartam proportionalem HQ; Etenim $GP : IM :: MO : HQ$. Iterum $HQ \times GP = HR$ dat parallelogrammum QHR. Inter QH, & HG quæeratur media proportionalis HT (§. 39), quæ erit novi trapezii basis LM. Linea MO novi trapezii est quarta proportionalis quæsitæ, & inventa, quæ sic se habeat ad GF, sicut se habet LM ad HG (§. 49). Rursus latus LN est quarta proportionalis inventa; sicut enim se habet HG ad LM = HT; ita se habere debet HE ad novum latus LN. Denique quartum latus NO est quarta proportionalis ad GH, LM, & EF; nam $GH : LM :: EF : NO$. Habebitur itaque novum Trapezium LNO ex trianguli ABC, & alterius trapezii HEFG additione conflatum. Q. E. F.

PROBLEMA V.

Tab. IX. §. 308. *Pentagonum irregulare X, & ellipsem Z addere, & exinde Fig. 162. similem majorem ellipsem, utriusque superficiæ æqualem formare.*

Pentagonum irregulare X redigatur in triangulum æquale ABC (§. 331. & 329). Hoc triangulum permutetur in æquale parallelogrammum ADEC (§. 328). Inter hujus parallelogrammi majus latus AC, & minus latus CE quæeratur media pro-

proportionalis FG (§. 39). fiatque quadratum $FGHI$. Ex hoc quadrato fiat circulus æqualis, cujus diameter sit MN . (§. 338) hic circulus erit æqualis pentagono X . Iterum duarum diametrorum ellipseos OP , & QR quærat media proportionalis ST (§. 39). ST erit diameter circuli æqualis ipsi ellipfi $PQOR$. Diametrus prioris circuli MN , & posterioris ST jungantur ad angulum rectum, & erit NT , nempe hypothenuſa trianguli SNT , diametrus circuli, duos priores circulos continentis (§. 269). Jam duæ diametri novæ ellipseos nempe MN , & UW ſunt duæ quartæ proportionales, quæ ſic reperiuntur: ſicut ſe habet ST ad NT ; ita ſe habet OP ad MN (§. 40). & iterum: ſicut ſe habet ST ad NT ; ita ſe habet QR ad UW . Itaque MN , & UW ſunt duæ diametri novæ ellipseos, ex additione pentagoni X , & ellipseos Z confurgentis. Q. E. F.

PROBLEMATA SUBTRACTIONIS.

Quoniam Subtractio proba eſt additionis bene peractæ, in ea tractanda, inverſo ad additionem modo atque ordine proceditur.

PROBLEMA VI.

§. 309. *Triangulum æquilaterum ſubtrahere ab alio triangulo æquilatero majore, atque ex reſiduo ruruſus triangulum æquilaterum producere.*

Conformiter regulis (§. 222.) traditis, latus majoris trianguli conſtituatur pro hypothenuſa; latus autem minoris trianguli ſubtrahendi ponatur vel pro baſi, vel pro catheto trianguli reſtangiuli: Tertium reſiduum trianguli reſtangiuli latus, dabit tertio triangulo æquilatero latus (§. 269).

PROBLEMA VII.

§. 310. *Triangulum ſcalenum ABC , cujus perpendicularis CN ſit Tab. IX. 12 pedum, ſubtrahere ab altero triangulo ſcaleno DEF , cujus*

G g jus

ius altitudo EM fit 18 pedum ; atque ex residuo rursus triangulum scalenum formare , cujus perpendicularis fit 9 pedum.

Triangulum ABC reducatur ad altitudinem 18 pedum, ita tamen ut $ACB = ROB$ (§. 330.) Basis RB subtrahatur a triangulo DEF, remanebitque triangulum DEG. Hoc triangulum residuum DEG reducatur ad altitudinem 9 pedum DHS (§. 330), & exhibebitur triangulum DHF æquale ipsi DEG. Q. E. F.

PROBLEMA VIII.

Tab. IX. §. 311. Pentagonum Z subtrahere a pentagono majori R, ut ex residuo hexagonum regulare formetur.

Super latere OP majoris pentagoni R constituatur semicirculus ; tum latus EF minoris pentagoni Z transferatur ex O in L, eritque residuum latus LP trianguli rectanguli, super quo latere LP construatur pentagonum regulare K ; hoc complectetur spatium ex majori pentagono R, residuum pro construendo hexagono. Ex hoc pentagono K fiat æquale parallelogrammum PCED (§. 335). Porro formetur magnitudinis arbitrariæ hexagonum regulare Q, hocque in æquale parallelogrammum LMTS redigatur (§. 334). Jam quærat quarta proportionalis MV (§. 40), ad quam sic se habeat PC, sicut se habet MT ad CE. parallelogrammum MUXT = PCED, & per consequens MUXT erit etiam æquale residuo pentagono K. Tandem inter LM, & MU quærat media proportionalis AB (§. 39). quæ erit latus quæsitæ hexagoni regularis X, æqualis ipsi residuo pentagono K. Q. E. F.

PROBLEMA IX.

Tab. IX. §. 312. Trapezium HEFG ab altero majori, & consimili Trapezio LNOM subtrahere, ita ut residuum referat figuram trianguli, altitudinis BZ.

Ambo trapezia transformentur in æqualia triangula (§. 329). Duo rursus illa triangula reducantur ad altitudinem eandem, eam nempe, quæ est minoris trianguli. Basis minoris dematur a basi trianguli majoris, atque triangulum illud, quod post subtractionem remanebit, coordinetur in æquale parallelogrammum (§. 328). Habito hoc parallelogrammo quæratu quarta proportionalis, nempe basis trianguli AC, quæ sic se habeat ad basim inventi parallelogrammi, sicut se habet media altitudo determinata BZ trianguli ABC ad altitudinem mox dicti parallelogrammi. Itaque cognita basi AC, & altitudine BZ facilis operæ fuerit triangulum ABC construere.

PROBLEMA X.

§. 313. *Pentagonum irregulare X ab ellipsi Y subtrahere, atque ex eo, Tab. IX. quod remanet, rursus ellipsim Z formare, quæ similis sit ma- Fig. 162. ori ellipsi Y.*

Ellipsis Y commutetur in æqualem circulum, cujus diameter sit TN. Fit hoc per inventam mediam proportionalem TN inter MN, & UW (§. 39). Iterum ex irregulari pentagono X fiat æquale triangulum ABC (§. 331, & 329). Ex æquali hoc triangulo ABC fiat rursus æquale parallelogrammum ADEC (§. 328), atque ex hoc tandem parallelogrammo ADEC æquale quadratum IHGF, (§. 337). hoc quadratum redigatur in æqualem circulum (§. 338), cujus diameter sit MN. Hæc diameter MN = SN assumpta pro basi, reliquum faciet latus ST; ita ut circulus diametri ST, & circulus diametri SN sint æquales circulo diametri TN (§. 269). Quod si itaque duplex quarta proportionalis inveniatur, nempe OP; quæ sic se habeat ad MN, sicut se habet ST ad TN: & QR, quæ sic se habeat ad UW, sicut se habet ST ad TN, habetur utraque diameter ellipseos inveniendæ Z, nempe OP, & QR, quæ ellipsis Z non tantum æqualis sit spatio residuo post subtractionem trapezii X ab ellipsi Y, sed insuper majori ellipsi Y sit similis. Q. E. F.

PROBLEMATATA MULTIPLICATIONIS.

P R O B L E M A X I.

Tab. IX. §. 314. Fig. 165. **T**riangulum ABC, cujus altitudo BE, & distantia perpendicularis ab altero angulorum AE, quadruplo majus reddere, servata tamen similitudine cum triangulo minori.

Basis AC in recta linea quater continuetur usque in 4; tum inter AC, & C 4 quærat media proportionalis CK (§. 39). quæ erit basis trianguli quadruplo majoris CFK. Novi hujus trianguli multiplicati linea perpendicularis FR est quarta proportionalis, quæ sic se habere debet ad perpendicularem BE, sicut se habet basis CK ad basim AC. Denique distantia perpendicularis lineæ ab altero angulorum, nempe CR est pariter quarta proportionalis, quæ sic se habet ad AE, sicut se habet CK ad AC. Quibus cognitis primum est construere triangulum CFK, quadruplo majus, quam sit triangulum ABC, simile tamen minori ABC. Q. E. F.

S C H O L I O N.

Tab. cad. §. 315. Fig. 166. **Q**uod si circum, aut quadratum multiplicare sit animus v. g. quater: valeat AC diametrum multiplicandi circuli, aut latus quadrati, erit media proportionalis CK diametrum circuli quater multiplicati, aut latus quadrati, itidem quater multiplicati. Quod si vero quadratum MOSN ita multiplicandum foret, ut sit bis, & duabus tertiis majus; tum media proportionalis inter MN, & N $\frac{2}{3}$ nempe XN dabit latus quadrato, toties multiplicato.

P R O B L E M A X I I.

Tab. IX. §. 316. Fig. 167. **T**riangulum HIK sic multiplicare, ut servata altitudine IL novum multiplicatum se habeat ad illud, ut 5 ad 3.

Ponatur basis arbitraria ST in tres partes itidem arbitrarías, attamen æquales divisa; Item assumatur altera basis MN,

MN, in 5 ejuscemodi æquales partes divisa : Tum quærat^r quarta proportionalis XZ, quæ sic se habeat ad MN, sicut se habet HK ad ST (§. 40). Hæc quarta proportionalis XZ erit basis trianguli multiplicati XIZ, habentis se ad HIK, ut 5 ad 3 ; sic quippe se habent superficies triangulorum ejusdem altitudinis, ut bases (§. 90).

PROBLEMA XIII.

§. 317. *I*rrégulare pentagonum A quinquies, & dimidio multiplicare, Tab. IX. ut rursus simile pentagonum, nempe B prodeat. Fig. 168.

Basis CL continuetur quinquies, & $\frac{1}{2}$; tum inter CL, & L $\frac{1}{2}$ quærat^r media proportionalis LK (§. 39). Hæc media proportionalis erit basis toties multiplicati pentagoni. Porro inquiretur in latus KS, & LS ; primum erit quarta proportionalis, quæ sic se habeat ad LN minoris pentagoni, sicut se habet LK ad CL : alterum nempe LS erit pariter quarta proportionalis, quæ sic se habet ad CN, sicut se habet LK ad CL. Habitis itaque tribus lateribus LK, KS, & LS fiat primum pentagoni majoris triangulum LSK (§. 105). Hac eadem ratione inveniuntur cæteræ lineæ pentagoni B, quæ nihil aliud sunt, quam meræ quartæ proportionales.

PROBLEMA XIV.

§. 318. *H*eptagonum irregulare X $1\frac{2}{3}$ multiplicare, ut tamen heptagonum majus Z proveniens sit simile heptagono X. Tab. IX. Fig. 169.

Inter basim AG, & G $\frac{2}{3}$ quærat^r media proportionalis GL (§. 39). Reliquæ lineæ veluti LP, PO &c. nihil aliud sunt, quam quartæ proportionales v.g. AG. GL : : GF. LP. iterum AG. GL : : GE. LO &c.

COROLLARIUM.

§. 319. *D*E multiplicatione quarumcunque figurarum regularium beneficio circini proportionalis vide (§. 224)

PROBLEMA DIVISIONIS.

SEquentes Propositiones fiunt inverſo ad multiplicationem ordine; Diviſio quippe proba eſt, ſeu reductio factæ multiplicationis.

PROBLEMA XV.

Tab. IX. §. 320. *Triangulum CFK per 4. ſic dividere, ut quarta illius ſuperficiæ pars ruruſus conſimile triangulum ABC exhibeat.*
Fig. 165.

Trianguli dividendi CFK baſis CK in quatuor æquales partes dividatur; Inter haſ quatuor partes, & unam ejuſmodi partem quæratuſ media proportionalis AC (§. 39.) Hæc media proportionalis AC. erit baſis novi trianguli ABC. Quarta proportionalis ad CK, AC, FR erit BE, nova nempe perpendicularis. Tandem quarta itidem proportionalis ad CK, AC, CR erit AE nova diſtantia perpendicularis lineæ ab alterutro angulorum. Itaque ſi ex A in B, ex B in C rectæ ducantur, habebitur triangulum ABG, ceu *quotum*, ex diviſione trianguli ſimilis majoris CFK. Q. E. F.

SCHOLIION.

§. 321. *Conſimili methodo dividuntur circuli, aut quadrata; ſit enim circulus, aut quadratum per 3 aut $4\frac{1}{2}$ dividendum, quæratuſ inter 1 & 3 vel $4\frac{1}{2}$ media proportionalis (§. 39); hæc inventa dabit diametrum circuli, aut quadrati latus, habetque ſe permodum numeri quoti.*

PROBLEMA XVI.

Tab. IX. §. 322. *Pentagonum irregulare B per $5\frac{1}{2}$ ita dividere, ut ex quotuſ ruruſus conſimile pentagonum A conſurgat.*
Fig. 168.

Juxta numerum diviſoris dividatur baſis LK in $5\frac{1}{2}$ partes æquales, atque inter 1, & $5\frac{1}{2}$ quæratuſ media proportionalis CL (§. 39.) hæc erit baſis novi pentagoni A. Tum quærantur duo latera NL, & NC, quæ ſunt duæ quartæ propor-

proportionales, habetque se NL ad SK, & NC ad SL sicut se habet CL ad LK. Aliæ lineæ, ceu quartæ proportionales inventæ, dabunt pentagonum quæsitum A.

PROBLEMA XVII.

§. 323. *H*eptagonum irregulare Z per $1\frac{2}{3}$ dividere, ut figura quotæ X Tab. IX. prorsus similis sit figuræ divisæ, nempe pentagono. Z. Fig. 169.

Heptagoni irregularis Z basis GL juxta exigentiam numeri divisoris $1\frac{2}{3}$, in quinque æquales partes redigatur. Tum inter 1, & $1\frac{2}{3}$, seu inter 3, & 5 quærat media proportionalis AG, tanquam basis heptagoni novi X ex divisione enascentis. Aliæ lineæ minoris heptagoni X sunt perpetuæ quartæ proportionales, veluti GL. AG :: LP. GF : iterum G L. AG :: LO. GE &c.

§. 324. *R*egulæ quoque *Proportionis* usus non inidoneus in Epipedometria esse potest, quod sequenti propositione fit palam.

PROBLEMA XVIII.

§. 325. *S*i datum triangulum, & paulisper minus datum pentagonum, debeatque tertia aliqua triangularis figura inveniri, qua sic se habeat ad pentagonum, sicut pentagonum se habet ad primum datum triangulum.

Pentagonum reducatur ad formam trianguli, ejusdem cum primo dato triangulo altitudinis (§. 333); Et quoniam triangula ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 90.) quærat ad basim primi dati trianguli, & secundi, e pentagono formati, linea tertia continuo proportionalis (§. 38.) hæc dabit basim triangulo ejusdem altitudinis, & habenti se ad pentagonum, quemadmodum pentagonum proportionaliter se habet ad primum datum triangulum.

Cæterorum Problematum resolutio ex allatis abunde elucebit. Jam ad ultimam Epipedometriæ speciem accedamus.

C A P U T IX.

De Metamorphosi Superficierum.

§. 326. *M*etamorphosis seu transformatio figurarum eo respicit, ut, si fortasse superficies quæpiam inidonea sit, ea in alterius figuræ superficiem priori omnino æqualem commutari queat. In Physica certo, areæ illæ, quæ a motis in linea curva circa centrum aliquod corporibus describuntur æqualibus temporibus, æquales inter se esse demonstrantur a clarissimo Newtono, quamvis inter se sint valde dissimiles. Transfigurationum ejuscemodi præcipua problemata afferemus.

PROBLEMA I.

Tab. IX. §. 327. *T*riangulum scalenum ABC ad æqualem Isoscelem AGC reducere.

Ad summitatem B ducatur recta DE, parallela ipsi AC (§. 9.) Ad extremitates baseos AC erigantur duæ perpendiculares AD, CE (§. 28, & 29.) habebitur parallelogrammum ADEC, duplum inscripti trianguli, aut per diagonalem separati (§. 182.) Linea DE dividatur in duas æquales partes in G, atque ex G ducantur rectæ in A, & C, habebiturque Isosceles AGC, æqualis scaleno ABC (§. 91.) Q. E. F.

PROBLEMA II.

Tab. IX. §. 328. *E*x triangulo rectangulo isosceles FRS parare æquale rectangulum parallelogrammum FMNS.

Ex

Ex R in O demittatur perpendicularis RO; hæc perpendicularis in duas æquales partes dividatur in C. Per C ducatur recta MN, parallela ipsi FS, atque ex F, & S erigantur perpendiculares FM, & SN, erit parallelogrammum FMNS æquale triangulo FRS.

Nam $FTM = TCR$ (§. 89.) : igitur & $FMCO = FRO$, & $FMNS = FRS$; Trianguli quippe cujuscunque basis, per medium altitudinis multiplicata, parallelogrammum dat triangulo æquale: sicut basis eadem trianguli per totam altitudinem multiplicata fit parallelogrammum duplum ipsi triangulo dato (§. 169.)

PROBLEMA III.

§. 329. *Figuram quadrilateram irregularem ABCD permutare in triangulum ejusdem superficiæ ABE.* Tab. X. Fig. 17e.

Ducatur primum recta ex B in D; mox lineæ huic rectæ ducatur parallela ex C, quæ in E cum linea prolongata AD concurrat in E. Denique fiat diagonalis BE, & habebitur triangulum $ABE =$ ipsi quadrilatero ABCD.

Nam $DCE = BDC$, & $DBE = BEC$ (§. 169.) Item $BM = EM$, & $BMC = DME$: igitur, & $DBE = BDC$, & $ABE = ABCD$. Q. E. D.

SCHOLIION.

§. 330. *E*Adem prorsus ratione triangula ad majorem altitudinem efferuntur, manente æquali superficie. Sit v. g. triangulum ABD ad altitudinem F provehendum: Ex puncto F ducatur recta in A, ut sit FA; huic lineæ ducatur ex B parallela in G, ac tandem ex F fiat diagonalis in G, & erit $GFD = ABD$. Fig. ead.

PROBLEMA IV.

Tab. X. §. 331. *Figuram pentagonam irregularem ABCDE in quadrilateram
Fig. 173. eandem irregularem KBCD permutare, manente equali superficie.*

Ex B in E ducatur linea recta BE; huic rectæ ducatur parallela KA, quæ in K cum prolongata linea DE concurrat; tum ducatur diagonalis BK: Itaque quia triangulum AEB æquale est triangulo KBE (§. 91.) habent enim basim BE communem, & eandem inter duas parallelas BE, & AK altitudinem; substituendo triangulum BKE loco trianguli BAE, quadrilatera figura KBCD erit ejusdem superficiei, cujus est pentagonum ABCDE.

PROBLEMA V.

Tab. X. §. 332. *Hexagonum regulare ABCDEF in aequali triangulum
Fig. 174. MNS permutare.*

Ex centro O demittatur perpendicularis in latus AF, quæ illud in G fecet in duas partes æquales. Tum in linea recta MS omnia sex latera hexagoni recto ordine constituentur, ac tandem in M erigatur perpendicularis $MN = OG$, eritque triangulum MNS dato hexagono ABCDEF æquale.

Nam superficies dati hexagoni æquivalet sex æqualibus, similibusque triangulis AOF, FOE &c. triangula autem hæc omnia æqualia sunt triangulo MNS; nam omnia sex triangula sunt ejusdem altitudinis OG, habentque æquales bases AB, BC &c. triangula autem ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 90): igitur cum triangulum MNS bases omnium sex triangulorum contineat in communi altitudine OG, erit triangulum MNS æquale sex triangulis hexagoni, seu ipsi hexagono ABCDEF, Q.E.D.

SCHOLION.

§. 333. **H**Acratione pentagonum, & aliud quodcunque polygonum regulare reducitur ad triangulum æquale. v. g. quia trianguli Z basis FG æqualis est quinque lateribus pentagoni X , tanquam totidem triangulorum basibus; & quia altitudo EF trianguli Z æqualis est AB altitudini quinque triangulorum pentagoni X : igitur pentagonum X æquale triangulo Z . Tab. X.
Fig. 175.

PROBLEMA VI.

§. 334. **H**Exagonum regulare $ABCDEF$ immutare in aequale parallelogrammum $AFHG$. Tab. X.
Fig. 174.

Ex centro hexagoni O demittatur perpendicularis OG , quæ latus AF in medio G secet. Item in extremitatibus A & F demittantur perpendiculares AG , & FH . Ad has perpendiculares transferatur ter linea perpendicularis OG , exinde confurget parallelogrammum $GAFH$ æquale dato hexagono $ABCDEF$.

Etenim ob æqualem basim, & eandem altitudinem triangulum $AKF = AOF$ (§. 89.) Rurfus triangulum $KFZ = GKF$, & $KAU = AKG$; & iterum $UAK = NAO$, & $ZFK = OFT$: igitur parallelogrammum $UAFZ = ANTF$, aut Rhombo $AOEF$, nempe duobus triangulis hexagoni: consequenter cum unum parallelogrammum $UAFZ$ æquale sit duobus triangulis hexagoni, & hexagonum sex æqualia triangula complectatur, erit triplum parallelogrammum, seu $GAFH$ æquale omnibus sex triangulis seu toti hexagono $ABCDEF$. Q. E. D.

PROBLEMA VII.

§. 335. **P**entagonum regulare X reducere ad aequale parallelogrammum $HCDI$. Tab. X.
Fig. 175.

H h 2

Ex

Ex centro A demittatur perpendicularis in latus CD, quæ illud in B fecet in duas partes æquales. In extremitatibus C D demittantur quoque duæ perpendiculares CH, & DI, in his notetur dupla perpendicularis, & media BN. Itaque parallelogrammum HCDI erit æquale toti dato pentagono X.

Nam parallelogrammum MCDO = duobus pentagoni triangulis CAD, & DAF; pentagonum autem quinque æqualia triangula continet: Igitur semitertium parallelogrammum æquale erit toti pentagono dato.

SCHOLION.

§. 336. **A**lia ratione paratur æquale parallelogrammum ex pentagono, vel hexagono; cum nempe juxta præcedentia problemata in triangula convertuntur, ac tandem triangula illa commutantur in parallelogrammum.

PROBLEMA VIII.

Tab. X. §. 337. **E**X Parallelogrammo A formare æquale quadratum B.
Fig. 176. Inter CD, & DE quærat media proportionalis FG. (§. 39.) hæc media proportionalis erit latus quæfiti quadrati.

PROBLEMA IX.

Tab. X. §. 338. **Q**uadratum ABCD in æqualem circulum permutare.
Fig. 177. Quadrati diagonalem BD partire in Decem partes æquales. Tum constituatur circuli pes in medio X, ac describatur circulus FGNM hac ratione, ut ultima pars utriusque extremitatis in diagonali BD excludatur, & diameter circuli 8 partes duntaxat contineat; fiet, ut descriptus Circulus FGNM physice quidem æqualis proxime sit dato quadrato. Itaque diagonalis quadrati se habebit ad diametrum circuli ut 10 ad 8 vel 5 ad 4.

SCHOLION I.

§. 339. **A** Lii dicunt latus quadrati se proxime habere ad circuli diametrum ut 23 ad 20. Quod si igitur circulum in quadratum permutare oporteat, dividatur circuli diametrus in 26 partes æquales, harum partium 23 constituantur pro latere quadrati, eritque quadratum dato circulo proxime æquale.

SCHOLION II.

§. 340. **A** St vero, circuli quadratura, quæ mathematicum rigorem sustineat, hodie in multorum votis est. Nequid autem hætenus reperiri: quia nempe peripheriæ circuli linea mathematicæ æqualis reperta non est (§. 253); Etenim sint circulo $CFAEDB$ sex triangula inscripta, poterunt utique illi triangulo plura, & minora triangula in infinitum inscribi, ita ut circulus considerari possit tanquam infinita triangula, quæ aream circuli prope adæquent; Hæc porro infinita triangula efficiunt polygonum regulare infinitorum laterum, quemadmodum sex triangula efficiunt regulare hexagonum. Jam vero cum in hexagono $CFAEDB$ altitudo GX assumpta pro catheto, & bases triangulorum CF , FA &c. seu perimeter hexagoni assumptus pro basi, triangulum æquale efficiant; etiam in infinitis ejuscemodi triangulis, circulo inscriptis, seu in polygono infinitorum laterum id evenire deberet: Attamen, ut ut altitudo GX , quo plura, & minora etiam in infinitum circulo triangula inscribantur, semper major fit, & infinite parvo spatio differt a radio GB , nunquam id obtinere licebit, etiam in infinitis inscriptis lateribus, ut latus seu basis BXD æqualis fiat arcui BD , & per consequens; ut omnia latera sint æqualia mathematicæ circuli peripheriæ.

*Ta. VIII.
Fig. 151.*

PROBLEMA X.

§. 341. **EX** Ellipsi æqualem circulum formare.

Inter utramque ellipseos diametrum quærat

media proportionalis; hæc media proportionalis erit diameter circuli, datæ ellipsi æqualis; Media quippe proportionalis tantò brevior est diametro longiore ellipseos, quanto est longior diametro brevior e jusdem ellipseos.

PROBLEMA XI.

Tab. X. §. 342. *Fig. 178.* **T**riplex conjunctum quadratum ABCDEFGH in quatuor similes partes secernere.

Singula quadrata in quatuor æquales partes discescantur, ut sint numero 12 partes, quæ utique in quatuor æquales dividi possint. Separentur hæ partes ab invicem juxta adnotata signa =, & deprehendentur quatuor partes enatæ, quarum omnes similes, & æquales inter se sint, & etiam similes toti diviso.

CAPUT X.

De Stereometria seu Solidorum Dimensione.

DEFINITIONES.

§. 343. **S**olidorum aliud est, quod *planis*; aliud quod *curvis*; aliud denique quod *mixtis* undique superficiebus includitur.

§. 344. **P**lani solidi rursus plures sunt species, nempe *regulari*, & *irregulari*. *Solida regularia plana* sunt quinque. *Tetraëdron*, quod quatuor triangulis æqualibus atque æquilateris comprehenditur. *Hexaëdron*, quod sex quadratis æqualibus undique concluditur, diciturque etiam alias *cubus*. *Octoëdron*, quod rursus octo æqualibus similibusque triangulis continetur. *Dodecaëdron*, quod circumdatur duodecim regularibus, & æqualibus pentagonis. *Icosaëdron*, quod continetur viginti æqualibus similibusque triangulis. Quæ omnia in figuris mox exhibebuntur.

§. 344. **A**D solida recta corpora sequentia referuntur : *Prisma*, quod est corpus, cujus suprema, & infima superficies æquales sunt, & parallelæ, & descendencia latera pariter parallela. Quod si superior, & inferior superficies *trigoni* figuram habuerint, vocabitur *prisma triangulare*, quod præcipue in Neutoniana colorum theoria, variisque experimentis usum præbet : *Quadrangulare* vero prisma vocatur, cum superior, & inferior superficies figura est quadrilatera. *Parallelepipedum*, seu corpus, sex parallelogrammis undique conclusum, quorum duo opposita, & parallela, & similia & æqualia sunt. *Pyramis*, quæ ex basi in acumen ascendit, & vel tribus, vel quatuor, aut etiam pluribus lateribus constringitur. *Pyramis truncata* dicitur ea, quæ superiorem acuminatam partem demptam habet.

§. 345. **A**D curvorum corporum classem referuntur : *Sphæra*, corpus solidum, cujus omnia peripheriæ puncta a centro æqualiter distant. *Spharoides* est corpus ad sphæræ similitudinem accedens, nisi quod ad axes paulo sit depressior; talis potissimum tribuitur figura telluri. *Cylindrus* corpus oblongum, cujus latera circulis concluduntur. *Conus* ex basi circulari in acumen confurgens. *Conus truncatus* est, cui vertex est ademptus. *Conoides* est corpus, circulum pro basi habens, tum aliquo spatio ascendens velut conus, non tamen in cuspidem desinens, sed loco cuspidis apicem sphæriformem habens.

§. 346. **I**rregularium solidorum infinita est series; exprimuntur autem in plano adhibitione umbræ, quæ umbra mentem ad intelligendam triplicem in longum, latum, & profundum extensionem manuducat. Corpora hæc omnia, seu *plana*, seu *curva*, cum aut secantur, aut sibi mutuo imponuntur, variam superficierum habitudinem, & configurationem præferunt; curva, & præsertim conus planis & difficiliorem, & variabiliorem. De *Sectionibus conicis* infra Cap. XV. agetur : de *curvis supra curvis* Cl. Clairaut admirabile monumentum procudit, eruditis veterum temporibus desideratum.

PRO-

PROPOSITIO I.

Tab. X. §. 347. **T**etraëdron in plano describere.
 Fig. 179. Formetur triangulum æquilaterum GEF, atque ex ejus centro D ducantur rectæ ad singulos angulos, nempe DG, DE, DF; habebitur tetraëdron, quod tres tantum bases, seu rectas superficies trilateras conspectui exhibeat.

COROLLARIUM.

Tab. X. §. 348. **Q**uodsi rete pro tetraëdro describere sit animus, ut vel ex charta, vel opportuno ligno ejusmodi tetraëdron construatur; delineetur primo triangulum æquilaterum ABC (§. 103). Super singulis ejus lateribus formentur triangula prorsus æqualia ACD, BCE, FAB. Si itaque hoc rete ita complicatum fuerit, ut F, E, D in uno puncto concurrant, habebitur tetraëdron.

PROPOSITIO II.

Tab. X. §. 349. **H**exaëdron, seu cubum in plano delineare.
 Fig. 181. Describatur primum rhombus ABCD (§. 200). Tum juxta latus AD describatur quadratum ADFE (§. 197). Adjungatur rhombus FDCG, eritque delineatum hexaëdron, cujus tres duntaxat superficies sint conspicuæ.

SCHOLIUM.

Tab. X. §. 350. **P**arallelepipedum eadem ferme ratione describitur, nisi quod loco rhombi adhibeatur rhomboïdes; fiat itaque rhomboïdes CGHD (§. 201); Tum ad latus CD describatur parallelogrammum CDBA (§. 198). adjungatur BDHF = CGEA, eritque parallelepipedum descriptum.

COROLLARIUM I.

Tab. X. §. 351. **R**ete pro constituendo cubo, seu hexaëdro sic paratur:
 Fig. 183. describitur quadratum ACDB (§. 197). Singulis hujus

hujus quadrati lateribus adjungantur alia similia quadrata; uni autem lateri nempe AC duplex ejuscemodi quadratum adjungatur, nempe $ACFE = EFHG$, eritque hexaëdri rete descriptum.

COROLLARIUM II.

§. 352. **P**arallelepipedum sic institue: descripto parallelogrammo tanquam base parallelepipedum $ABDC$ (§. 198), adjuge singulis lateribus competentia parallelogramma ejusdem altitudinis, nempe: $AIKB$, $BLMD$, $CDFE$, $HACG$, quæ altitudinem parallelepipedum constituent. Denique ad latus LM applicetur parallelogrammum $LNOM =$ ipsi $ABDC$, habebiturque rete *parallelepipedum* descriptum. Tab. X.
Fig. 184.

PROPOSITIO III.

§. 353. **P**arallelepipedum $HAED$ per planum diagonale $ABDC$ dividitur in duo prismata inter se aequalia. Tab. X.
Fig. 185.

Nam duo parallelogramma $GAEB$, & $HCFD$ dividuntur per duplicem diagonalem AB , & CD in duo triangula aequalia (§. 169): ergo cum prismata ABE , HCD præter aequales bases etiam æqualem altitudinem habeant, omniaque eorum latera parallelis circumcludantur (§. 344), erunt etiam aequalia inter se. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

§. 354. **O**ctoëdron in plano delineare. Tab. X.
Fig. 186.
Fiat quadratum $ABCD$ (§. 197). atque ex ejus centro E ducantur rectæ ad quatuor angulos A, B, C, D , ut videantur plana triangularia latera, ex puncto E tanquam elatiori, versus extrema latera descendere, & erit descriptum Octoëdron, cujus quatuor tantummodo latera sint visibilia, quatuor autem sint averfa.

COROLLARIUM.

Tab. X. §. 355. Fig. 187. **R**Ete pro octoëdro sic describitur : formatur triangulum ABC (§. 103.) Singulis hujus trianguli lateribus æquilatera triangula adjungantur , eritque FED simile ABC. CD protrahatur in I , formeturque triangulum $DIH = ADC$; singulis trianguli HID lateribus æquilatera triangula adjungantur , habebiturque rete descriptum , ex quo opportune complicato *octoëdron* construere liceat.

Tab. X. §. 356. Fig. 188. & 89. **A**D describendum in plano *dodecaëdron* , & *Icosaëdron* nihil attinet longas præceptiones afferre , cum harum configuratio in tabulis luculente exhibeatur.

COROLLARIUM I.

Tab. X. §. 357. Fig. 190. **D**odecaëdri rete describitur , cum pentagonum ABC DE primo delineatur (§. 202). & singulis his pentagoni lateribus alia æqualia , & consimilia Pentagona adjiciuntur ; erunt itaque sex pentagona , medium dodecaëdri involucrum ; itaque ut duodecim ejuscemodi pentagona habeantur , adjuuge lateri FG structuram consimilem sex istiusmodi pentagonorum , eritque rete delineatum , ex quo complicato *dodecaëdron* confurgat.

COROLLARIUM II.

Tab. X. §. 358. Fig. 191. **R**Ete pro construendo *Icosaëdro* delineatur , cum super linea recta AB quinque æquilatera triangula describuntur ; super horum triangulorum vertices ducatur linea CD , atque super ea rursus describantur quinque æquilatera triangula , æqualia prioribus ; Tandem lineæ AB in inferiori parte quinque ejuscemodi triangula adscribantur , & habebitur rete viginti triangulorum æquilaterorum , ex quo complicato *Icosaëdron* confurgat.

PRO-

PROPOSITIO V.

§. 359. *Neque plura, neque pauciora corpora regularia angularia esse possunt, quam quinque, nempe tetraëdron, hexaëdron, octoëdron, dodecaëdron, & Icosaëdron.*

Corpus regulare constituitur ex concurrentibus planorum angulis; hi autem anguli debent necessario pauciores gradus constituere, quam 360; quia nempe 360 gradus circa aliquod centrum non jam corpus, sed planam superficiem describent (§. 234). Igitur fingamus tres triangulares planas areas ad solidum constituendum concurrere, veluti in tetraëdro (§. 347). Singuli triangulorum æquilaterorum anguli sunt 60 graduum (§. 196); cumque tres ejuscemodi anguli conjuncti universim tantum 180 gradus efficiant, erunt apti ad solidum componendum. In octoëdro quatuor areæ triangulares, seu quatuor triangulorum anguli ad compositionem concurrunt (§. 354); quatuor autem illi anguli gradus 240 complectuntur, quod sane minus est gradibus 360. In Icosaëdro constituendo quinque anguli triangulorum concurrunt (§. 356); qui anguli, cum gradus duntaxat 300 contineant, apti sunt ad solidum componendum. Verum sex ejuscemodi anguli solidum jam componere nequeunt, quia concurrentes efficiunt gradus 360, id est superficiem planam (§. 234). Ad compositionem hexaëdri, seu cubi concurrunt tres anguli quadrati (§. 349); angulus autem quadrati extenditur ad sinum totum, seu 90 gradus (§. 77). & tres ejuscemodi anguli universim efficiunt 270 gradus, qui sane opportuni sunt ad solidum componendum; non item quatuor, utpote jam numerum 360 graduum adæquantes. In compositione dodecaëdri tres pentagonorum regularium anguli concurrunt (§. 356); angulus autem pentagoni, utpote amblygonius, extenditur ad 108 gradus, & tres simul ad 324; quod sane minus etiam est gradibus 360: quatuor jam ad componendum solidum concurrere nequeunt, utpote ad 432 gradus excurrentes. Sexangulares areæ ad solidorum compositionem prorsus ineptæ sunt; unus enim ejuscemodi angulus cum sit 120 gra-

dum, tres compositi conficerent 360 gradus, id est, superficiem planam: Igitur corpora regularia non possunt esse nisi enumerata quinque, nempe *Tetraëdron*, *Hexaëdron*, *Octoëdron*, *Dodecaëdron*, *Icosaëdron*, quæ Corpora eo ipso etiam regularia sunt, quod singula æqualibus similibusque planis superficiebus ambiuntur. Q. E. D.

COROLLARIUM.

§. 360. **Q**uinque hæc regularia corpora non tantum sphaeræ includi, sed etiam adeo ordinate ad sphaeræ superficiem coaptari possunt, ut prominentiæ omnes æque a centro sphaeræ distent. Porro omnes hæc regulares figuræ tot cuspides versus centrum protrudunt, totque pyramides ceneri possunt, quot facies seu planas superficies habent.

Tab. XI. §. 361. Fig. 192. **P**risma in plano describitur, cum delineato triangulo parallela latera imponuntur, quæ latera rursus superne consimili, & æquali triangulo parallelo terminantur. Quod si *prisma* foret quatuor laterum, illud non differret a parallelepipedo (§. 350). Quinque aut sex laterum prismata delineantur, cum aut pentagono, aut hexagono totidem latera adinvicem parallela imponuntur.

PROPOSITIO VI.

Tab. XI. §. 362. Fig. 193. **R**esc pro triangulari prismate delineare. Triangulum ABC primo describitur, hujus lateri AB imponitur parallelogrammum ADEB; Rursus hujus parallelogrammi lateri DE imponitur triangulum DFE = ABC. Præterea utrique longiori lateri parallelogrammi adjunguntur parallelogramma HGDA, & BEIK, eritque descriptum rete, ex quo complicato Prisma triangulare consurgat.

PROPOSITIO VII.

Tab. XI. §. 363. Fig. 192. **P**risma est productum multiplicata bascos per suam altitudinem. Nam duæ bases ABC, DFE sunt æquales, similes,

les, & parallelæ; Latera quoque EC, FB, D'A parallela constituunt. Præterea plana intermedia II, HH, GG sunt & similia, & æqualia basi: Igitur basis ABC toties repetita, quot fuerint dimensionis puncta signata per altitudinem perpendicularem, exhibebit prisma, quod erit productum baseos multiplicatæ per suam altitudinem.

COROLLARIUM I.

§. 364. **O**Mnis sectio *prismatis* II, HH, GG parallela ad basim ABC, est basi similis, & æqualis; formatur quippe motu ad basim ABC parallelo, inter parallela CE, BF, AD.

COROLLARIUM II.

§. 365. *Prismata*, quæ æqualem basim habent, dicunt eandem inter se rationem, quam altitudines: & vicissim; *Prismata* quæ eandem habent altitudinem, habent eandem inter se rationem, quam bases.

COROLLARIUM III.

§. 366. **D**Enique *Prismata* sive *recta*, sive *inclinata* sunt æqualia, si basim eandem, & altitudinem habeant; Nam *prisma inclinatum* erit quidem longius *prismate recto* ejusdem baseos, quemadmodum & *parallelogrammum obliquum* longius est *parallelogrammo recto* (§. 181.) sed quemadmodum *parallelogrammum obliquum* minus latum est *parallelogrammo recto* ejusdem altitudinis, ita & *prisma inclinatum*; ut proinde æqualia sint *prismata* seu *recta* seu *inclinata* ejusdem baseos, & altitudinis.

PROPOSITIO VIII.

§. 367. **O**Mne quodlibet *Prisma triangulare* continet tres *pyramides* inter Tab. XI. se æquales. Fig. 194.

Sit prisma $ABDFE$. Triplex hujus prismatis rectangulum nempe DC , CE , DA per triplicem diagonalem FB , FA , EB dividatur, & habebuntur tres pyramides triangulares æquales $DFEB$, $BFAC$, $ABEF$.

Nam $DFEB = BFAC$; habent quippe æqualem basim nempe triangulum $DFE = BCA$, & æqualem altitudinem nempe latus $DB = CF$. Rursus $ABEF = DFEB$, cum pariter basim æqualem habeant, id est: triangulum $ABE = DBE$ tanquam alteram medietatem rectanguli EB ; altitudinem item æqualem nempe GF communem utrique; Corporum autem magnitudines, quæ sunt æquales tertiæ cuidam magnitudini, sunt etiam æquales inter se (§. 2. Axiom. 4). Igitur $DFEB = BFAC = ABEF$. Et consequenter prisma triangulare continet tres pyramides triangulares inter se æquales. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

§. 368. **Q**uemadmodum *prisma* triangulare resolvitur in tres *pyramides* triangulares ejusdem baseos, & altitudinis, ita & *prisma* plurium laterum resolvitur in pyramides tres totidem laterum; semper quippe pyramis tertia est *prismatis* pars (§. 367.)

COROLLARIUM II.

§. 369. **S**icut triangulum, & omnis alia figura polygona in totidem triangula resolvi potest, quot latera complectitur; cum nempe ex centro figuræ cujuscunque rectæ lineæ ad singulos angulos protenduntur (§. 195.) Ita quoque *Prisma* polygonum quodcunque in tot prismata triangularia resolvitur, quot latera continet.

PRO-

PROPOSITIO IX.

§. 370. *D*uo Parallelepipeda similia sunt inter se in triplicata ratione laterum homologorum; seu habent se ut cubi exponentium latera homologa.

Etenim superficies duæ similes, quæ sunt in longum, & latum extensæ, habent se in duplicata ratione laterum homologorum (§. 92.) igitur parallelepipeda similia, quæ sunt in longum, latum, & profundum extensa (§. 7.) habebunt se in triplicata ratione eorundem laterum homologorum; ita ut si parallelepipedum habeat tam longitudinem quam latitudinem, & profunditatem triplo majorem altero parallelepipedo, sit ratio exponentium 3. 1. (*Not. Algeb. Divis. Arith.*) Igitur triplicando hæc rationes, proveniet ratio cubi 27, 1. quæ notat alterum similia parallelepipedorum esse vigesies septies altero majus.

COROLLARIUM.

§. 371. *Q*uod si aliquod parallelepipedum constituatur ex multiplicatione trium linearum continuo proportionalium, erit æquale alteri parallelepipedo, quod habuerit omnia latera æqualia mediæ lineæ trium illarum proportionalium. Etenim sint 3 lineæ proportionales, *prima* 2 ped. *altera* 4 ped. *tertia* 8 ped. Primi parallelepipedi basis habeat 8 ped. longitudinis, & 2 ped. latitudinis. $8 \times 2 = 16$. altitudinem vero habeat 4 ped. Alterius parallelepipedi basis habeat & longitudinis, & latitudinis 4 ped. $4 \times 4 = 16$. (§. 215.) altitudinis vero pariter 4. pedes. Igitur cum parallelepipeda, quæ, & basim æqualem, & æqualem altitudinem habent, æqualia sint (§. 365.) erunt dicta duo parallelepipeda omnino inter se æqualia.

§. 372. *P*yraxis in plano delineatur, cum primo triangulum *Tab. XI.* ABC describitur (§. 103.) tum vero ad punctum *Fig. 195.* D arbitrarie altitudinis rectæ ducuntur ex singulis angulis A, B, C, & habetur *Pyraxis* delineata. §. 373.

Tab. XI. §. 373. **C**onus eadem prope ratione delineatur: describitur primo circulus $ABCD$, ex hujus centro O ad arbitriam altitudinem usque in punctum E erigitur perpendicularis OE (§. 24.) atque ad hoc punctum E ex A , & C rectæ ducuntur, habeturque descriptus *conus*.

§. 374. **Q**uemadmodum basis *pyramidis* triangularis est triangulum, ita quadrangularis aut sexangularis est quadratum aut hexagonum &c. quæ tamen latera omnia in uno puncto verticis secundum rectas lineas concurrunt. Quo autem basis pyramidalis plures angulos habuerit, eo figura pyramidalis ad conicam propius accedet. (§. 272. & 274.)

§. 375. **A**ltitudo tam *pyramidis* quam *coni* desumitur non ex laterum longitudine, sed ex recta, a vertice in centrum baseos O demissa. Cum linea recte ex vertice in basim descendens basi perpendicularis est, tum *pyramis* aut *conus* est rectus; obliquus autem, cum linea illa descendens basi non est perpendicularis.

§. 376. **Q**uod de *pyramide* dictum est (§. 368); esse nempe tertiam partem prismatis ejusdem baseos, ejusdemque altitudinis, id quoque de *cono* intelligi debet: eum nempe pariter esse tertiam cylindri partem; Quemadmodum enim circulus nihil est aliud, quam polygonum regulare infinitorum laterum (§. 340): ita quoque *cylindrus* est prisma infinitorum laterum, & *conus* pyramis laterum infinitorum.

PROPOSITIO X.

Tab. XI. §. 377. **R**ecte describere pro *pyramide* quinque angulorum.
Fig. 197. Describatur pentagonum $ABCDE$ tanquam basis (§. 281.) ex puncto O mediæ lineæ AB erigatur perpendicularis OF ad arbitriam altitudinem, atque ex F ducaur arcus GOK ; In hunc arcum quinque latera pentagoni transferantur

tur nempe GH, HA, AB, BI, IK, eritque pyramidis re-
te descriptum.

§. 378. **H**Ac eadem methodo rete pro *cono* describitur: Ex *Tab. XI.*
centro A fit circulus BCDE. Diametrus circu- *Fig. 198.*
li DB dividitur in 7 partes æquales; atque ex centro A ad
arbitrariam distantiam recta protenditur in G. Ex G, tanquam
centro, ducatur arcus HK, & in hunc arcum 22 partes,
æquales 7 partibus diametri, abscindantur, eritque rete *coni*
paratum.

PROPOSITIO XI.

§. 379. *Cylindrum in plano, ejusdemque rete describere.* *Tab. XI.*
Duo circuli ABCD, & EFGH æquales, & pa- *Fig. 199.*
ralleli describuntur, & lateribus AE, & GC copulantur; Ita
est descriptus *cylinder*.

§. 380. **U**T vero fiat rete cylindri; intra duos circulos AB *Tab. XI.*
CD, & EFGH interponitur spatium arbitrarium *Fig. 200.*
AE, quod *cylindri* altitudinem potest. Ad punctum A, & E
erigantur perpendiculares AM, EL, quæ sic se habeant ad
diametrum utriusque circuli, ut 22 ad 7 (§. 252.) Tandem
fiat linea LM parallela ipsi EA, habeturque rete cylindri de-
scriptum.

PROPOSITIO XII.

§. 381. *Superficies cylindri aequalis est parallelogrammo, cujus longitudo* *Tab. XI.*
fit longitudo peripheriæ baseos cylindri, latitudo autem fit al- *Fig. 199.*
titudo cylindri.

In peripheria baseos cylindricæ AZCD, EFGH con-
cipe arcum, quam potes, minimum v. g. MN XB; duc pa-
rallelas MX NB, uterque arcus propter exilitatem suam æ-
quivalere poterit lineæ rectæ, ita ut MXBN sit parallelo-
gram-

grammum; itaque cum tota superficies cylindri in mera ejusmodi parallelogramma dispesci possit, quorum altitudo communis sit ZF , Latitudo autem peripheria cylindri; erunt omnia hæc parallelogramma uni parallelogrammo æqualia, cujus longitudo sit peripheria cylindri, & latitudo cylindri altitudo.

§. 382. **Q**uod si inter altitudinem cylindri AE vel CG , & diametrum baseos FH quæras mediam proportionalem, atque hanc inventam assumes pro radio circuli; erit circulus ille efformatus æqualis superficiei cylindri, habentis altitudinem EA , & basim circularem $AZDC$.

CAPUT XI.

Reliqua de Sphæra expediuntur.

DEFINITIONES.

Tab. XI. §. 383. **I**n *sphæra*, quæ definita est (§. 345.) sequentes spectantur partes debent: *Punctum* A , quod est intra figuram, seu *centrum* sphæræ. ABC , quæ est linea recta, per centrum sphæræ incedens, & utrinque in superficiem terminata. *Termini Axis* sunt poli sphæræ, seu ipsa puncta BC . *Amplitudo circularis sphæra* est peripheria circuli ex axe seu diametro descripti BEC . *Perimeter* superficialis est tota sphæræ convexa superficies. *Soliditas* sphæræ est totum ejus corpus, convexa superficie clausum. *Sphæra genesis* habetur, cum semicirculus BEC circa axem BC circumrotari intelligitur.

PROPOSITIO I.

Tab. XI. §. 384. **Q**uod si *sphæra* utcumque plano secetur, sectio erit circulus; ita quidem, ut si plana sectio $DSEU$ per centrum *sphæra* A pertransierit, circulus maximus illius *sphæra* efformetur: si vero sectio *sphæra* centrum A non pertransierit, veluti sectio $GMHN$, radii illius circuli, sectione efformati, nempe GO , OH erunt minores radii *sphæra* AE .
Nam

Nam omnia puncta sectionis majoris DSEU æqualiter a centro A distant; perpetui quippe radii æquales a centro ad peripheriam protenduntur, atque eandem a centro distantiam metiuntur. (§. 232, & 345.) Minoris sectionis GMHN pariter extrema puncta æqualiter a centro A, & axe O distant, cum $AG=AH$, & $OG=OH$. Igitur utraque sectio erit circulus.

§. 385. **R**urfus Quadratum radii sphæræ AH æquale est quadratis AO, & OH (§. 96); atqui $AH=AE$; & OH est radius minoris sectionis GMH, sicut AE radius majoris sectionis DSEU: igitur radii sectionis, per centrum non transeuntis, minores sunt radiis illius sectionis, quæ per sphæræ centrum pertransit. Q. E. D.

SCHOLION I.

§. 386. **S**I plures circuli maximi eandem sphæram secant, secabunt se omnes mutuo bifariam in duas partes æquales, & quemadmodum circuli illi maximi æquales inter se sunt, ita & partes, per interfectionem productæ, æquales inter se sunt; Hinc est, quod in sphæra armillari solstitium æstivum ab hyemali æquidistet, uti & æquinoctium vernum ab æquinoctio autumnali; Duo quippe coluri, qui centrum sphæræ intelliguntur pertransire, in duas æquales partes sphæram secant.

SCHOLION II.

§. 387. **P**er quævis duo puncta in sphæræ superficie assumpta potest maximus sphæræ circulus formari; non item potest per quævis data bina puncta formari circulus minor maximo, quod vel ex solis punctis axeos patescit.

PROPOSITIO II.

§. 388. **D**ua sphæra similes habent se ad invicem ut cubi diametrorum maximi circuli, seu ut cubi exponentium rationis radiorum.

Kk 2

Nam

Nam sit sphaeræ unius radius ad alterius sphaeræ radium duplus, erunt exponentes rationis radiorum 2, & 1. Jam cubus 2 = 8; & cubus 1 = 1: (§. Not. Alg. Div. Arith.): Igitur sphaeræ illæ duæ sunt ad invicem ut 8 ad 1. seu ut cubi exponentium rationis radiorum.

PROPOSITIO III.

Tab. XI. §. 389. *Sphaera se habet ad cylindrum ejusdem baseos, & altitudinis, ut Fig. 202.*
2 ad 3.

Finge quadratum rectangulum ACDB, cui inscriptus sit quadrans ACHB, & triangulum ACGB. Jam finge hoc quadratum ACDB circa latus CA gyron, quadratum rectangulum ACDB efficiet cylindrum; quadrans ACHB hæmisphaerium; triangulum vero ACGB efficiet conum; quæ omnia eandem basim, & altitudinem habent. Sit itaque hypothesis, totam basim, & cylindri, & hæmisphaerii, & conii esse AB; altitudinem vero AC, atque a basi ad summitatem usque triplicia hæc corpora in meros discos secari; Hi disci utpote circuli erunt ut quadrata diametrorum (§. 267). Porro diametri discorum in media altitudine EF scissorum, erunt pro cylindro EF = AB = AH. pro hæmisphaerio erit EH; pro cono EG, seu AE, cum EG = AE; ita ut triplices hæc diametri AH, EH, AE triangulum rectangulum AHE constituent; Igitur cum quadratum hypothenusæ AH, quæ diameter cylindri est, quadratum duplicis alterius lateris EH, & AE, nempe quadratum diametri hæmisphaerii ACHB, & quadratum diametri conii ACGB adæquet (§. 96.) Conus autem tertia pars cylindri sit (§. 377.) sequitur necessario, diametrum duas tertias cylindri adæquare, ideoque mediam sphaeram, seu etiam totam sphaeram habere se ad cylindrum ejusdem baseos cum maximo circulo sphaera, ejusdemque cum sphaera altitudinis ut 2 ad 3. Q. E. D.

SCHOLION.

§. 390. PRæclari hujus Theorematis auctor est *Archimedes*, qui præ-

præcipua quadam cura atque sollicitudine *circularum spherarumque* naturam atque affectiones est persecutus ; Tantum ille sibi, præ aliis acutissimi ingenii inventis, in hoc gaudebat, suos ut amicos sæpius requireret ; vellent suo aliquando tumulto sphaeram cum cylindro superimponere memoriae causa. Quod monumentum iisdem insignibus decoratum ; multo tempore interjecto a se deprehensum fuisse *Cicero* in *Tusculanis* commemorat.

PROPOSITIO IV.

§. 391. *S*uperficiem sphaera invenire.

Ex radio, seu diametro quaeratur circuli maximi periphæria (§. 252.) inventa hæc periphæria multiplicetur per diametrum, & factum dabit superficiem sphaeræ. Tab. XI.
Fig. 203.

Itaque superficies sphaeræ est quadrupla areæ maximi circuli ; nam sphaera *ACBG* habet se ad cylindrum *FDEH* ejusdem baseos, & altitudinis ut 2 ad 3 (§. 389). Duæ autem æquales cylindri bases *DMEN*, & *FXHZ* efficiunt unam tertiam, & latera cylindri *FDEH* duas tertias ; Atqui tam basis *DMEN*, quam *FXHZ* æqualis est areæ maximi circuli sphaeræ *AB* : Igitur sphaera *ACBG*, quæ duabus tertiis cylindri *FDEH* æquivalet, erit æqualis quatuor areis maximi circuli.

§. 392. *R*urfus mediæ sphaera superficies æqualis est duplæ areæ maximi circuli ; Etenim sphaera mediæ superficies æquivalet superficiei cylindri habenti pro basi maximum sphaera circulum, & pro altitudine radium sphaera ; superficies autem hujusmodi cylindri sine basi æquivalet duplici areæ maximi circuli sphaera : Igitur, & sphaera superficies æquivalet duplici areæ maximi circuli.

§. 393. *S*uperficies segmenti æqualis est circulo, cujus radius est linea ducta a polo ejus ad periphæriam basis ejus. Tab. XI.
Fig. 201.

Sic superficies segmenti B G H æqualis est circulo, cujus radius est recta B G.

Nam triangula O B G, & B G C sunt æquiangula (§. 87.) igitur B C. B G :: B G. B O. Igitur B G erit media proportionalis (§. 397.) Adeoque cum superficies cylindri æqualis sit circulo, cujus radius est media proportionalis inter altitudinem cylindri, & diametrum baseos (§. 383.) Ita & superficies segmenti B G H erit æqualis circulo, cujus radius est B G; & superficies majoris segmenti G C H æqualis circulo, cujus radius est G C. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Tab. XI. §. 394. *Fig. ead.* **H**Ac ratione areas quarumcunque Zonarum metiri licebit v. g. Zonæ D E G H. Etenim circulus radio B E descriptus æqualis est superficiei segmenti D E seu hemisphærio; & circulus radio B G descriptus æqualis est superficiei segmenti G H. Minorem hunc circulum subtrahe a majori, & habebis superficiem residuam, in Zona G D E H interceptam.

PROPOSITIO V.

§. 395. *Sphæra æqualis est pyramidi, aut cono; cujus basis sit superficies, & altitudo radius sphære.*

Quemadmodum circulus dictus est polygonum regulare infinitorum laterum (§. 340.) ita & *sphæra* considerari potest ut solidum corpus regulare, compositum ex infinitis pyramidibus, habentibus pro altitudine radium *sphære*, pro basi autem *sphære* superficiem, a qua pyramidum vertices versus centrum concurrant; Plures autem pyramides ejusdem altitudinis habent se in ratione basium, quemadmodum plura triangula ejusdem altitudinis (§. 184.) igitur *sphæra* æqualis est pyramidi, cujus basis sit superficies, & altitudo radius *sphære*, aut etiam æqualis est cono; *conus* quippe nihil aliud est, quam pyramis infinitorum laterum (§. 377.) Q. E. D. CO-

COROLLARIUM.

§. 396. **Q**uoniam pyramis prismatis, & conus cylindri ejusdem baseos & altitudinis est tertia pars (§. 268, & 377). *Sphæra* autem æqualis est pyramidi, aut cono habenti pro basi superficiem, & pro altitudine radium sphaeræ (§. 395). Igitur & *sphæra* erit cylindri, aut prismatis tertia pars, habentis pro basi superficiem, pro altitudine vero radium sphaeræ.

PROPOSITIO VI.

§. 397. *D*uarum sphaerarum superficies sunt in ratione duplicata radiorum.

Cum enim superficies *sphæra* sit quadrupla areæ maximi circuli (§. 391); circuli autem duo, aut plures se habeant ad invicem in duplicata ratione radiorum, seu ut quadrata radiorum (§. 267). Igitur & duarum sphaerarum superficies sunt ut quadrata radiorum. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

§. 398. *D*iametrus in longum, latum, & profundum ducta, seu cubus diametri, ex mente Archimedis habet se propemodum ad sphaeram ejusdem diametri ut 21 ad 11; secundum alios ut 300 ad 157.

Sit diametrus 100 pedum, ejus cubus erit 1000000, quia nempe 100 per 100 bis multiplicatur (§. 142 *Arith.*) Jam quærat soliditas cylindri, ejusdem cum diametro baseos 100 altitudinis (§. 415), & habebitur factum 785000. *Sphæra* autem habet duas tertias cylindri (§. 389). Itaque beneficio arithmetice deprehenduntur hujus numeri 785000 esse duæ partes $523333\frac{1}{3}$; Et cubus diametri habebit se ad sphaeram ut 100000 ad $523333\frac{1}{3}$; seu, si utrumque per 3 multiplicaveris, ac tandem per 10000 divideris ut 300 ad 157. Q. E. D.

SCHO.

SCHOLIŌN.

§. 399. **D**icitur autem cubus diametri ad sphaeram ejusdem diametri habere se prope ut 300 ad 157; quia quemadmodum circulus mathematice commensurari nequit quadrato (§. 257); ita neque cubo sphaera.

CAPUT XII.

De Inventione soliditatis diversorum corporum.

§. 400. **Q**uemadmodum duplex est ratio superficiem mensurandi, altera per lineas, altera per numeros (§. 212, & 213); ita & eadem duplex metiendi ratio in solidis corporibus recurrit. Metimur autem corporum soliditatem cubice, id est in longum, latum, & profundum. Pertica, quæ in longum duntaxat protensa, 10 pedes habet, extensa simul in latum habebit 100 pedes; omnis quippe lineæ pes rursus in 10 pedes in latum protenditur; eadem pertica simul in profundum extensa 1000 pedes complectetur. In dimensione solidorum frequens est usus arithmeticæ decimalis (§. 155 *Aritb.*)

PROPOSITIO I.

§. 401. **T**etraëdri soliditatem invenire.

Sit tetraëdron cujus longitudo sit $5^{\circ}0''$, erit illius latitudo baseos $3^{\circ}6''9$, & altitudo pariter $3^{\circ}6''9$. Jam longitudo baseos $5^{\circ}0''$ multiplicetur per mediam latitudinem nempe $1^{\circ}84\frac{1}{2}$ (quia nempe basis tetraëdri est figuræ triangularis (§. 347). triangulum autem æquivalet parallelogrammo ejusdem longitudinis, & mediæ latitudinis (§. 328) factum habe-

DE INVENTIONE SOLIDITATIS DIVERS. CORP. 265

habebitur 92250. Hoc rursus multiplicetur per tertiam partem altitudinis, id est per 123 (quia nempe tetraëdron, seu pyramis est tertia prismatis pars (§. 368) Factum erit soliditas tetraëdri $11^{\circ} 346^{\prime} 750^{\prime\prime}$. Aut etiam 92250 multiplicetur per totam altitudinem $3^{\circ} 6^{\prime} 9^{\prime\prime}$, factumque per 3 dividatur, quod est perinde.

SCHOLION.

§. 402. **Q**Uoniam in dimensione superficialium, bini & bini characteres incipiendo a dextris numerorum præscinduntur, quia nempe pertica superficialis non 10, sed 100 pedes complectitur (§. 214). ita in dimensione solidorum terni, & terni characteres abscinduntur, eo quod pertica cubica non 100, sed 1000 pedes contineat.

PROPOSITIO II.

§. 403. **U**bi soliditatem metiri.
Latus cubi in se ducitur, & factum proveniens rursus cum numero lateris multiplicatur; Factum dabit cubi soliditatem.

COROLLARIUM.

§. 404. **S**ic etiam parallelepipedi soliditas invenitur: sit longitudo illius $3^{\circ} 4^{\prime} 2^{\prime\prime}$, latitudo $1^{\circ} 3^{\prime} 6^{\prime\prime}$, altitudo $2^{\circ} 2^{\prime} 0^{\prime\prime}$.
 $3^{\circ} 4^{\prime} 2^{\prime\prime} \times 1^{\circ} 3^{\prime} 6^{\prime\prime} = 46512$. Rursus $4, 65, 12 \times 2^{\circ} 2^{\prime} 0^{\prime\prime} = 10, 232, 640$. Quæ erit quæsitæ soliditas.

PROPOSITIO III.

§. 405. **P**iramidis soliditatem invenire.
Inveniatur primum superficies baseos (§. 219).
L 1 Hæc

Hæc basis pyramidis multiplicetur cum tertia parte altitudinis ; quia nempe pyramis est tertia prismatis pars ejusdem baseos, & altitudinis. Factum dabit pyramidis soliditatem.

S C H O L I O N.

§. 406. **A**ltitudo pyramidis, aut *cons* invenitur, dum in linea horizontali prope pyramidem, aut conum perpendiculariter erigitur, ac superne tam supra pyramidem, quam supra perticam transtrum collocatur, atque utriusque æqualis altitudo libella exploratur.

C O R O L L A R I U M I.

§. 407. **Q**uoniam *octoëdron* rationem habet duplicis pyramidis quadrangularis (§. 354). Duplicetur primum basis pyramidis hujus, & factum cum tertia parte pyramidis multiplicetur, habebiturque soliditas octoëdri.

C O R O L L A R I U M I I.

§. 408. **I**cosaëdron vero, cum æquivalet viginti tetraëdri, quorum vertices versus centrum concurrant, ut illius soliditas inveniatur ; addantur viginti illæ tetraëdrorum bases, factumque cum tertia parte altitudinis tetraëdri multiplicetur, & habetur quæsitum.

C O R O L L A R I U M I I I.

§. 409. **D**odecaëdron. habet rationem duodecim pyramidum pentagonarum. Inveniatur primum baseos pentagonæ superficies (§. 220) ; Inventa superficies baseos multiplicetur cum tertia parte altitudinis (§. 405). Hoc factum multiplicetur per 12 ; tot quippe sunt pyramides pentagonæ. Et prodibit dodecaëdri soliditas.

P R O.

PROPOSITIO IV.

§. 410. *Soliditatem prismatis invenire.*

Superficies baseos cum altitudine prismatis multiplicatur, & habetur intentum. Sit longitudo baseos $12''$, latitudo ejusdem $3''$, altitudo vero $96''$. Jam $12'' \times 3'' = 4320$; rursus $4320 \times 96'' = 4177440$. (§. 402.)

COROLLARIUM.

§. 411. *Cylindri soliditas invenitur eodem modo, cum nempe superficies circularis baseos per altitudinem multiplicatur.*

§. 412. *Pyramidis truncata, aut etiam truncati conii cognoscitur soliditas.*

Supputatur *Pyramis*, aut *conus* haud aliter, quam si truncata illa pars *pyramidi*, aut *cono* inesset (§. 405). tum dempta illa sola pars affumitur, atque soliditas illius investigatur (§. 405). Factum hoc secundum subtrahitur a facto primo, habeturque *Pyramidis truncata*, aut etiam *conii truncati* (§. 345) soliditas.

PROPOSITIO V.

§. 413. *Soliditatem cylindri invenire.*

Inventa superficies baseos circularis (§. 265). multiplicetur cum altitudine *cylindri*, & habetur factum.

COROLLARIUM I.

§. 414. *Cum conus tertia sit cylindri pars (§. 381). invenietur illius soliditas, si superficies baseos inventa cum tertia parte altitudinis multiplicetur. v. g. sit diameter*

baseos *coni* 4", & tertia altitudinis pars 8". Jam juxta §. 265 superficies baseos hujus coni = 18, 86½, vel 18, 86, 50. Rursus 18, 86, 50 × 8, 2, 0 = 154, 693, 000; aut absolute 154, 693. Quæ erit soliditas *coni* inquisita.

COROLLARIUM II.

§. 415. **C**YLINDER, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, habet se ad cubum, cujus unum latus itidem æquale est diametro baseos, ut 785 ad 1000.

Nam sit diameter baseos = 100. erit tota superficies = 7850 (§. 265). Jam vero altitudo cylindri pariter est æqualis 100 ex *hypothesi*; 7850 × 100 = 785000; hæc quippe erit soliditas cylindri. Porro unum cubi latus = 100 cubetur, erit factum 1000000; Ideoque cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos habet se ad cubum, cujus unum latus itidem æquale diametro baseos, ut 785000 ad 1000000. seu ut 785 ad 1000.

PROPOSITIO VI.

§. 416. *Soliditatem sphaera invenire.*

Inquiratur primum in *sphaera* diametrum; Hujus diametri numerus redigatur in cubum (§. 142 *Aritbm.*) Inven- to cubo fiat regula proportionis: sicut se habent 300 ad 157, (§. 398); ita se habet cubus inventus ad quartum nume- rum proportionalem. Quartus hic proportionalis numerus erit *sphaera* soliditas.

Aut quæretur area maximi circuli *sphaera* (§. 265). Hæc area multiplicetur per diametrum circuli, & habebitur cylin- drus, cujus basis sit æqualis maximo *sphaera* circulo, & altitu- do

do æqualis *sphæra* altitudini (§. 413). Jam *sphæra* se habet ad cylindrum ut 2 ad 3 (§. 391). Igitur duæ tertiæ inventi cylindri dabunt *sphæra soliditatem*.

COROLLARIUM.

HAc ratione Terræ totius, quam interim sphaericam esse ponimus, soliditas reperitur.

§. 417. *S*ector GAH *sphæra* æqualis est cono, cujus altitudo est *spha-* Tab. XI.
ra semidiameter AB, & basis radius recta BG. Fig. 201.

Nam sicuti circulus constare concipitur infinitis triangulis (§. 340); ita sphaera infinitis tetraëdris, quorum bases versus superficiem protendantur, & quæ tetraëdra conum efficiant (§. 377). Igitur tanta erit coni basis, quanta est superficies sectoris GBH; atqui hæc superficies convexa æqualis est superficiei circulari, cujus radius est recta BG (§. 383). ergo sector GAH æqualis est cono, cujus altitudo est sphaeræ semidiameter AB, & basis radius recta BG.

PROPOSITIO VII.

§. 418. *S*oliditatem irregularis cujusque corporis invenite.

Paratur quadrata lignea cista; in hanc primo corpus illud irregulare, tum tantum aquæ immittitur, usque dum irregulare illud corpus totum contegatur. Porro notetur accurate aquæ in vase ascensus, exemptoque corpore advertatur, quoadusque subsidat aqua. Denique ob regularem cistæ figuram facile ex deprehenso spatio in cognitionem soliditatis illius regularis corporis devenitur.

SCHOLION.

§. 419. **Q**uodsi vero corpus illud irregulare aquæ afluisionem non sustineret, adhibe loco aquæ tenuissimam arenam, quam superne asserculo poteris complanare.

§. 420. **H**uc pertinet *doliorum Stereometriam* quadantenus pertractare, ad explorandos nimirum contentos in vasis liquores solitam adhiberi. Cum vasa cylindrica fuerint, facilius negotii est eorum capacitatis dimensio; difficilius, cum vasa irregularis cujuspiam fuerint figuræ. Cl. Wolffius (§. 582.) *Element. Geometriæ virgulam pithometricam seu cylindricam* affert, cujus usu liquores in vasis cylindricis mensurare liceat,

PROPOSITIO VIII.

Fig. 204. §. 421. *Virgam cylindricam seu pithometricam construere.* Assumatur vas minus cylindricum v. g. unius mensuræ ABCD; hujus diameter AB transferatur in duas lineas perpendiculares, ita ut $AI = AB$, & erit linea BI diameter vasis duas mensuras capientis. Iterum BI transferatur in A2, & erit B2 diameter vasis tres mensuras continentis. Sic porro B3 erit diameter vasis quatuor mensurarum, B4 mensurarum 5. B5 mensurarum 6 &c. in vase tamen semper ejusdem altitudinis cum vase, non nisi unam mensuram capiente. His ita constitutis divisiones inventæ transferantur in unum virgulæ latus nempe A1, A2, A3 &c. altitudo autem vasis cylindrici, unam mensuram capientis toties transferatur in alterum latus virgulæ, quoties transferre per longitudinem virgulæ licet; habeturque virgula parata.

COROLLARIUM.

§. 422. **O**pe Arithmeticæ possunt hæc cylindrorum diametri determinari. Assumatur diameter $AB = AI$ esse 1000. hoc quadratur, nempe $1000 \times 1000 = 1000000$. Jam ut inveniatur diameter A2, cylindri nimirum duas mensuras capientis, $1000000 \times 2 = 2000000$. Ex hoc numero 2000000 extrahatur radix quadrata (§. 149. *Arithm.*) hæc erit 1414; tot nempe partium æqualium erit diameter A2. Quod si diameter cylindri 3, 4, aut quinque mensurarum inquiretur, multiplicentur 1000000 per 3, 4, 5 &c. & extrahatur radix

radix quadrata, hæc dabit diametrum vasis cylindrici ejusdem semper altitudinis.

PROPOSITIO IX.

§. 423. *Q*ue virgula pithometrica determinare numerum mensurarum vasis non cylindrici, sed in medio paulisper largioris. Tab. XI.
Fig. 205.

Applicetur virgula pithometrica ad utramque diametrum vasis nempe AD, & FE, quarum hæc largior est priore; harumque duarum diametrorum numeri constituentur. Porro ut inæqualium diametrorum AD, & FE fiat cœquatio, quaeratur numerus medius, inter utrumque æquidifferens, & hic per longitudinem vasis AB multiplicetur, habebiturque numerus mensurarum, in dolio contentarum. v. g. Sit AD = 6, FE = 8. medius numerus æquidifferens = 7. longitudo AB = 12 × 7 = 84. Hæc erit dolii capacitas.

SCHOLIUM.

§. 424. *Q*uoniam dolia communi existimatione pro duobus conis truncatis usurpantur, cum tamen tales non sint; Nam lineæ rectæ AF, & BF non sunt æquales arcibus AMF, & BNF; igitur in mathematico figure eorum capacitas non exploratur.

PROPOSITIO X.

§. 425. *C*onstruere virgulam pithometricam, aptam determinationi fluidi in dolio non pleno. Tab. XI.
Fig. ead.

Cognitæ capacitatis assumpto dolio pleno, quod situm horizontalem teneat, dividatur liquor illius dolii in partes arbitrarias v. g. in 20. Tum immissa per orificium F virgula, usque ad fundum E pertingente, emissaque e dolio parte vigesima, notetur decrementum fluidi in virgula; idque per omnes vigesimas fluidi partes continuetur. Notatis itaque his decre-

crementorū intervallis in uno virgulæ latere, in altero latere ejusdem fiant divisiones partium æqualium ultra vigesimorum inæqualia intervalla v. g. in 200 aut 300 partes excurrentium, habeturque virgula parata.

PROPOSITIO XI.

§. 426. *Fluidum dolii non pleni determinare ops bujus virgula.*

Tab. XI.

Fig. ead.

Primo totius dolii capacitas inquiratur (§. 423.) Tum virgula per orificium F usque in E immittatur. Advertatur in extracta virgula, quotnam partes in latere æqualium sint madidæ. Jam fiat regula proportionis: sicut se habet numerus partium æqualium totius dolii FE ad numerum similium partium fluidi XE: ita numerus partium, quæ intervalla scrupulorum vigesimorum referunt ad inveniendum quartum numerum proportionalem. (§. 79 *Arithmetica*). Denique adhibito manuali circino capiatur spatium tot æqualium in virga partium, quot numerus inventus indicat, & transferatur hoc spatium in scalam scrupulorum vigesimorum, & notetur eorum numerus, quæ ipsi congruunt. Ubi numerus mensurarum totius dolii per hunc numerum divisus fuerit, quotus dabit numerum mensurarum dolii non pleni. v. g. Sit capacitas dolii per (§. 423.) mensurarum 246. FE 200, XE 60, numerus partium æqualium, congruentium integro scrupulorum vigesimorum intervallo 190.

$$\begin{array}{r}
 200 \text{ — — } 60 \text{ — — } 190 \\
 \phantom{200 \text{ — — } 60 \text{ — — } } 60 \\
 \hline
 \phantom{200 \text{ — — } 60 \text{ — — } } | 11400 | 57'
 \end{array}$$

Jam tribuamus 57. esse $\frac{1}{4}$ partium in scala inæqualium; divisæ 246 mensuræ per 4 = 61 $\frac{1}{2}$, tot quippe mensuræ in dolio non pleno continebuntur.

COROLLARIUM.

§. 427. **S**oliditas murorum quorumvis in ædificiis, aut mœnibus constitutorum deprehenditur, cum muri illi, siquidem regulares, cœu parallelepipeda considerantur; Jam longitudo basis per latitudinem multiplicetur, & factum rursus ducatur in altitudinem, habeturque quæsitum: veluti sit murus longus 15 ped. latus 3 ped. altus 9 ped. $15 \times 3 = 45$. $45 \times 9 = 405$ ped. cub. tot quippe pedem cubicorum erit muri illius soliditas. Nisi fortassis fenestrarum aut portarum aperturæ soliditatem illam interrumperent; tum quippe illarum aperturarum capacitas subtrahitur.

CAPUT XIII.

De variis Stereometriæ speciebus.

§. 428. **Q**uod in Euthymetria supra (§. 303.) ostendimus, species nempe arithmeticas *additionem, subtractionem, multiplicationem, & divisionem* in ea utiliter atque jucunde adhiberi; id in *Stereometria* quoque locum jure suo obtinet. Quoniam autem hæc species *Stereometrica* duplici modo institui possunt, *per numeros, & per lineas*, nos lineis duntaxat utemur. Libeat pauca, pro ratione geometrici nostri compendii problemata exponere.

PROBLEMATA ADDITIONIS.

I.

§. 429. **D**uos cubos E & F ita sibi invicem addere, ut tertius aliquis Tab. XI. G, utrique priori æqualis, habeatur. Fig. 206.

Datis duobus lateribus AB, & CD quaeratur primum tertia proportionalis (§. 38). Tum habita tertia proportionali, quaeratur quarta proportionalis continua (§. 40, & 41). Hæc quarta proportionalis sit BO.

M m

BO

BO addatur ipsi AB, ut sit AO. Porro inter rectas AO, & AB quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42). Harum duarum inventarum minor, nempe NM, erit latus cubi G, ex additione utriusque cubi E, & F confurgentis.

Cum enim superficies se habeant in duplicata ratione (§. 185); cubi autem, in triplicata ratione (§. 371.) igitur ut latus CD cubi minoris F proportionetur, lateri AB cubi majoris E debet quarta proportionalis BO assumi, quæ respectivè ad cubum F est tertia proportionalis; atque ut rursus AO cubi lateribus proportionetur, assumenda est duarum mediarum inter AB, & AO proportionalium minor, quæ pariter respectu AO est tertia proportionalis.

II.

Tab. XI. §. 430. *EX duabus pyramidibus A, & B ejusdem altitudinis, sibi additis, tertiam pyramidem C elicere, duabus additis æqualem.*
Fig. 207.

Fiat triangulum rectangulum pro cuius basi assumatur quadratæ baseos latus EF; pro catheto opponatur quadratæ ibidem baseos latus EH. Ac tandem ducatur hypothenusa HK. Hæc hypothenusa HK erit latus quadratæ baseos pro nova pyramide C ejusdem altitudinis SO.

Nam $EF \times EF + EH \times EH = HK \times HK$. (§. 96.) Prismata autem ejusdem altitudinis habent eandem inter se rationem, quam bases (§. 365.) igitur, & pyramides, quæ tertia pars sunt prismatum (§. 368), ejusdem altitudinis eandem rationem habebunt, quam bases.

PROBLEMATATA SUBTRACTIONIS.

III.

Tab. XI. §. 431. *EX cubo G subtrahere cubum F, ut residuum rursus cubum E referat.*
Fig. 206.

Ad

Ad latus MN, & CD quærat^r quarta proportionalis MR (§. 429, item §. 38, 40). Quarta hæc proportionalis MR subtrahatur a latere MN, & remanebit NX. Jam inter NM, & NX quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42); major harum duarum erit latus AB cubi E post subtractionem remanentis.

IV.

§. 432. *EX* pyramide C subtrahere pyramidem B, ut residuum constituat Tab. XI.
tertiam rursus pyramidem A ejusdem altitudinis. Fig. 207.

Cum hæ duæ pyramides C, & B quadratum basim, eandemque altitudinem habeant, ex hypothesis; itaque super latus IK ex centro I delineetur semicirculus, atque latus E.H pyramidis subtrahendæ B abscindatur ex illo semicirculo, remanebit EF (§. 241). Hæc recta EF erit latus remanentis pyramidis A ejusdem cum pyramide C altitudinis. Etenim $HK \times HK = EH \times EH + EF \times EF$ (§. 96.) Pyramides autem ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 430.)

PROBLEMATA MULTIPLICATIONIS.

V.

§. 433. *S*phæram A multiplicari per 4, ita ut rursus sphæra B proveniat. Tab. XI.
Fig. 208.

In linea recta axis FE sphærae A quater notetur; Tum inter quadruplam hanc diametrum FE, & simplicem axem FE quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42.) Minor harum duarum proportionalium erit EG, axis quater multiplicatae sphærae B.

COROLLARIUM.

§. 434. *A* Rithmetice problema sic absolvitur: quærat^r primum soliditas sphærae A (§. 416). Hæc multiplicetur per 4. Habito hoc producto fiat per regulam proportionis positio: sicut se habet 11 ad 21; Ita se habet productum illud quadruplicatae soliditatis sphaericæ, ad cubum axis sphærae

ræ (§. 398.) Ex hoc rursus producto extrahatur radix cubica (§. 153. *Aritbm.*) Hæc radix dabit axem sphaeræ B.

VI.

Tab. XI. §. 435. Cylindrum C, cujus altitudo sit 17, triplicare, ut aliter cylinder proveniat D, cujus altitudo sit duntaxat 12.
Fig. 209.

Ex basi circulari cylindri C fiat quadratum (§. 338.) Hujus quadrati latus AB in data recta linea triplicetur, ac quaeratur inter simplicem lineam AB, & triplicatam media proportionalis (§. 39.) Tum ad HKI2, FGI5, & inventam mediam proportionalem quaeratur quarta proportionalis (§. 40.) Denique inter prius inventam mediam proportionalem, & hanc quartam proportionalem quaeratur rursus media proportionalis, hæc erit latus MN majoris quadrati; quod quadratum si rursus in circulum commutetur (§. 338.) erit hic circulus basis novi cylindri D ad altitudinem KH evecti, æqualis triplici cylindro C.

PROBLEMATUM DIVISIONIS.

VII.

Tab. XI. §. 436. Sphaeram B per 4 dividere, ut ex quotis rursus sphaera A eliciatur.
Fig. 208.

Sphaeræ B diametrus EG in 4 æquales partes dividatur (§. 17.) tum inter EG, & $\frac{1}{4}$ EG quaerantur duæ mediæ proportionales (§. 42.) Major harum duarum dabit diametrum quotam sphaeræ A quaesitæ.

VIII.

Tab. XI. §. 437. Cylindrum D, cujus altitudo sit 12, per 3 sic dividere, ut quotus cylindrum pariter referat C altitudinis 15.
Fig. 209.

Basis circularis cylindri D commutetur in quadratum (§. 338.) cujus latus sit MN. Inter latus MN, & $\frac{1}{3}$ MN quaeratur media proportionalis (§. 39.) Mox ad altitudinem FGI5, HKI2, & repositam mediam proportionalem quaeratur quarta

ta proportionalis (§. 46.) Demum inter mox repertam quartam proportionalem, & priorem inventam mediam proportionalem denuo inquiratur media proportionalis, quæ erit latus AB minores quadrati. Hoc quadratum, cum rursus in circulum conversum fuerit (§. 338.) & super hoc circulo erigatur cylindrus C altitudinis F G 15; erit cylindrus hic quotus cylindri D per 3 divisi.

§. 438. **P**roblemata divisionis, multiplicationi: & problemata subtractionis additibni, ceu probæ deserviunt.

PROPOSITIO IX.

§. 439. *Ope solius Arithmetica cubum aut multiplicare, aut dividere. Tab. XI.*
 Sit cubus E cujus latus AB = 12 duplicandus, Fig. 206.
 Redigatur latus AB in cubum $12 \times 12 = 144$, $144 \times 12 = 1728$. Cubus $1728 \times 2 = 3456$. Hæc erit soliditas cubi E duplicata; Itaque ex hac soliditate 3456 efficiatur radix cubica = 15 (§. 153. *Arithm.*) Ex hæc radice 15 tanquam latere construetur cubus, qui sit duplex ipsius cubi E.

SCHOLIUM.

§. 440. **Q**uoniam vero in extractione cubicæ radice 15 ex 3456, remanent 81, igitur cubus duplicatus non est omnino æqualis cubo E, sed tantum, quantum fieri æqualis potuit cum æqualibus partibus; Quemadmodum enim numerus quispiam quadratus, & deinde duplicatus, quadratus esse nequit (§. 179); ita minus numerus cubicus duplicatus est cubus. Hoc problema duplicationis cubicæ vocatur alias *Problema Deliacum*, quod Apollo Delius olim Atheniensibus sponderit, pestis se averruncum futurum, cum aram suam cubica forma præditam, viderit duplicatam.

COROLLARIUM I.

§. 441. **E**jusdem radice cubicæ subsidio licet cubum aliquem

majorem in duos æquales minores dispescere. Soliditas cubi fit $= 4096$, cubi nimirum, cujus unum latus fit $= 16$. Numerus soliditatis 4096 , dividatur in duas partes æquales, atque ex singulis æqualibus partibus extrahatur *radix cubica*; hæc dabit latus utrique minori cubo, quibus ambobus major ille divisus æqualis fit, non tamen perfecte, cum in utriusque radicis extractione aliquis numerus remanest; neque enim potest numerus cubicus in duos cubos adæquate dispesci.

COROLLARIUM II.

§. 442. **Q**uod si cubum triplicare, quadruplicare aut quotiescunque demum multiplicare sit animus, multiplicetur cubi illius soliditas per numerum multiplicatorem, atque ex producto eliciatur radix cubica (§. 153. *Arithm.*) Hæc dabit latus cubo toties multiplicato. Idem inverso ordine fiat in divisione cuborum quælibet: ex numero quoto soliditatis in arbitrarias partes divisæ extrahatur radix cubica; hæc dabit latus cubis minoribus.

COROLLARIUM III.

§. 443. **C**on simili operatione arithmetica sphaeræ aut multiplicentur, aut dividuntur: super sphaeræ dividendæ diametro cubus erigitur, aut potius numerus diametri redigitur in cubum; factum arbitrarie dividitur, atque ex quoto radix cubica extrahitur, hæc dabit diametrum minoribus sphaeris, e divisione provenientibus.

PROPOSITIO X.

§. 444. **D**Uorum corporum regularium similibus proportionem invenire; idque ope circini proportionalis.

Utriusque corporis latus unum homologam mensuretur, horum laterum alterum deponatur in lineam cubicam, ita ut
lateris

lateris terminus in consimilem utriusque cruris numerum designat; alterius corporis desumptum latus transferatur in correspondentes lineæ cubicæ numeros; Ita ut si primum latus homologum numero 10 lineæ cubicæ insertum sit, alterius vero corporis homologum latus, manente eadem circini proportionalis apertura, numero 27 congruat, primum corpus regulare simile habere se ad alterum dicatur ut 10 ad 27; habent se quippe latera Corporum, ut circini aperturæ.

PROPOSITIO XL.

§. 445. *D*atis duobus corporibus invenire tertium corpus proportionale.

Fit hoc pariter ope circini proportionalis. Sint data duo corpora dissimilia, reducantur primum ad eandem speciem (§. 448, & seqq.): Tum vero horum duorum corporum inveniatur proportio (§. 444.) ita ut primum corpus sit 27, alterum = 36. Porro assumatur latus = 36, & deponatur in 27 lineæ cubicæ transversim, atque eadem in apertura circini proportionalis desume distantiam inter 36, & 36 ejusdem lineæ cubicæ, quam distantiam conserva. Iterum reduce circinum proportionalem eo, ut latus = 27 ad numerum 27 transversim sit protensum, & inquire cuinam distantie numerorum in cubica linea reperta receas distantia inter 36, & 36 competat. Hæc in assumpto problemate erit 48. ita ut corpus regulare = 48 sit tertium proportionale majus ad duo data nempe 27, & 36; eodem quippe modo se habet 27 ad 36, quo 36 ad 48.

Quod si tertium minus proportionale corpus reperire sit animus, procedatur ordine inverso. Prodibit quippe $20\frac{1}{4}$, quod erit tertium proportionale minus corpus.

PROPOSITIO XII.

§. 446. *D*atis tribus corporibus reperire quartum proportionale ope ejusdem circini proportionalis.

Sint

Sint datæ tres sphaeræ $A=6$, $B=10$, $C=15$; seu sphaeræ A diametrus $=6$, sphaeræ B diametrus $=10$, sphaeræ C diametrus $=15$. Diametrus $=15$ deponatur transversim in 6, & 6 lineæ cubicæ, & manente eadem circini proportionalis apertura, desumatur distantia inter 10, & 10 lineæ cubicæ, quæ distantia circino manuali bene notetur. Tum vero sic disponatur circinus proportionalis, ut diametrus A $=6$ numero transverso 6, & 6 & lineæ cubicæ coæquetur, tandem periclitare, cuinam numero transverso lineæ cubicæ recens reperta inter 10 & 10 distantia congruat, & prodibit quarta diametrus major proportionalis $=25$. Nam $6.10 :: 15.25$.

§. 447. **Q**uod si quarta proportionalis minor diametrus petatur; deponatur diametrus $=6$ in numerum 10 transversim lineæ cubicæ, & desumatur distantia inter 6, & 6, hæc erit $=4$. & $15.10 :: 6.4$. Idem quippe est latus ex linea arithmetica in cubicam transferre, quam illud ipsum latus cubare; & vicissim latus ex linea cubica in arithmeticam deponere idem est; quod extrahere radicem cubicam. Atque ex his operationibus, maximo compendio peragendis, præstantia atque utilitas circini proportionalis merito colligitur.

C A P U T XIV.

De Metamorphosi Stereometrica.

DEFINITIO.

§. 448. **M**etamorphosi Stereometrica est transmutatio corporum ex alia figura regulari in aliam, manente eadem soliditate. Harum Metamorphoseon seu transfigurationum præcipua problemata afferemus.

PROPOSITIO I.

Tab. XII. §. 449. **P**arallelepipedum X cujus longitudo AB, latitudo CF, & altitudo

Fig. 210.

titudo AC transmutare in aliud parallelepipedum Z, cujus longitudo SU aequalis latitudini CF prioris parallelepipedi X; latitudo UW = BO, & altitudo HS.

Primum super altitudine AC ipsius parallelepipedi X constituitur recta CE = ipsi BO; Ex puncto E per D ducatur recta in G, & erit parallelepipedum BOSG = ACDB. Porro BOSG ponantur pro basi, cujus altitudo sit OM; Jam supra OM erigatur recta MT = HS. Ex puncto T, per N, ducatur recta TU: eritque parallelepipedum Z, cujus longitudo SU; latitudo autem, & altitudo nempe UW = BO, & MT = HS, æquale parallelepipedo X. Horumque demonstratio repetitur a quarta proportionali;

Nam CE = BO. CD : : DB. BG. Et TM = HS. MN : : NS. SU. Igitur $AB \times AC \times CF = SU \times SH \times UW$. seu parallelepipeda X, & Z sunt æqualia.

COROLLARIUM I.

§. 450. **I**dem transmutationis problema ope arithmetices ab-*Ta. XII.*
solvitur: sit latus CD parallelepipedi X = 30, A *Fig. ead.*
C = 24, & CF = 20; debeatque hoc parallelepipedum mutari in aliud Z, cujus latus UW = 40, & latus SU = 20. Latus CD = 30 × AC = 24 = 720. Hoc divisum per UW = 40, dat quotum 18, qui erit numerus lateris HS. Igitur cum 30 × 24 = 720 × 20 = 14400 : & 40 × 18 = 720 × 20 = 14400, erunt parallelepipeda X, & Z inter se æqualia.

COROLLARIUM II.

§. 451. **E**Adem propemodum ratione ex parallelepipedo aut alio quocunque regulari corpore æqualis cubus formatur, cum nempe ex soliditate illius corporis radix cubi-
ba extrahitur, atque hæc pro latere cubi assumitur.

PROPOSITIO II.

§. 452. *Pyramidem in Prisma commutare.*

Servata eadem pyramidis basi, super ea prisma describitur (§. 361), ut altitudo hujus prismatis sit ad pyramidis altitudinem $\frac{1}{3}$. & erit prisma æquale pyramidi (§. 368).

COROLLARIUM I.

§. 453. **E**Adem rursus ratione ex cono formatur æqualis cylindrus, sicut enim pyramis est prismatis, eandem basim habentis, una tertia; ita & conus cylindri.

COROLLARIUM II.

§. 454. **I**nverso modo proceditur, si forte ex prismate pyramidem æqualem, aut ex cylindro æqualem conum formare sit animus.

PROPOSITIO III.

§. 455. *EX Icosaëdro æquale parallelepipedum formare.*

Sit Icosaëdron, quod 20 tetraëdra contineat (§. 408); unius autem tetraëdri basis sit $5''''$ longitudinis,

latitudinis vero, & altitudinis $369''''$. Jam longitudo tetraëdri quintupla multiplicetur cum dupla latitudine, & habebitur parallelepipedum basis; rursus assumatur tertia pars altitudinis tetraëdri, & erit parallelepipedum æquale Icosaëdro permutato. seu $5'''' \times 5 = 25'''' \times 369'''' \times 2 = 738'''' =$

$1845000 \times 123 = 226,935,000''''$. Hæc quippe erit emergentis parallelepipedum soliditas; quam eandem soliditatem con-

stituunt 20 tetraëdra $5''''$ long. latitudinis, & altitudinis $369''''$;
nam

nam unum ejuscemodi tetraëdron = $11', 346'', 750'''$ (§. 401).

Igitur $11', 346'', 750''' \times 20 = 226', 935'', 000'''$. Perinde enim est, seu longitudo baseos triangularis omnium 20 tetraëdronum cum media parte latitudinis multiplicetur (§. 328); seu quarta pars longitudinis in duplam latitudinem ducatur (§186), & factum tandem per tertiam partem altitudinis multiplicetur (§. 384).

PROPOSITIO IV.

§. 456. *Sphæram in æqualem cubum permutare.*

Juxta sphæræ datæ altitudinem, & latitudinem cylindrus constituatur (§. 384). Quoniam hic cylindrus ad sphæram habet proportionem sesquialteram, seu ut 3 ad 2 (§. 391). demitur cylindro tertia altitudinis pars, & erit æqualis sphæræ datæ. Jam hic cylinder in cubum permutetur (§. 447), & habebitur cubus datæ sphæræ æqualis.

COROLLARIUM.

§. 457. **Q**uod si sphæræ datæ soliditas cognita sit, extrahatur ex eadem radix cubica (§. 153 *Aritbm.*) quæ dabit latus cubo proxime æquali. Alias, cum sphæræ diameter in 10 æquales partes dividitur, atque octo harum partium pro cubi latere assumuntur, prodibit itidem cubus datæ sphæræ prope æqualis.

PROPOSITIO V.

§. 458. *Cubum in sphæram commutare.*

Sit cubus, cujus radix, seu latus sit = 5. Itaque quoniam radix cubi ad diametrum æqualis sphæræ se habet ut 1000 ad 1260; fiat regula proportionis: ut 1000 ad 1260, ita 5 ad quartum proportionalem, factaque operatione

prodibit $6\frac{2}{3}$. ita ut diameter sphaeræ esse debeat $6\frac{2}{3}$, ad hoc ut sphaera æqualis reddatur cubo, cujus radix 5 .

SCHOLIION.

§. 459. PRO caeterorum regularium corporum immutatione apponere juvat sequentem tabellam, ut ea nimirum inspecta ex regulari corpore aliud æquale constitui possit, nempe:

| | |
|----------------------|------|
| Diameter sphaeræ | 1260 |
| Latus cubi - - - | 1000 |
| Latus tetraëdri - - | 2051 |
| Latus octoëdri - - | 1285 |
| Latus Icosaëdri - - | 757 |
| Latus dodecaëdri - . | 501. |

Veluti sit ex sphaera, cujus diameter $3\frac{2}{5}$, æquale Icosaëdrum formandum: 1260. 757. $3\frac{2}{5}$. factaque operatione deprehendatur latus Icosaëdri æqualis esse debere $2\frac{1}{8}$.

PROPOSITIO VI.

§. 460. *Sphaeram in cylindrum commutare, idque subsidio circini proportionalis.*

Diameter sphaeræ deponatur in lineam cubicam, ut utrinque numerum 30 contingat. Sic constituto circino proportionali, defumatur distantia inter 20, & 20 lineæ cubicæ; erit hæc distantia latitudo cylindri, æqualis ipsi sphaeræ, altitudine manente eadem cum axe sphaeræ. Hac methodo utuntur frequenter Pyrotechnæ in præparandis calibris.

CAPUT XV.

De Conicis Sectionibus.

DEFINITIONES.

- §. 461. **S**ectiones conica nomen suum a cono (§. 374), qui plano secatur, sunt indeptæ; Quemadmodum enim in sphaera, dum plano secatur, sectio efformatur; quæ *circulus* dicitur: ita quoque, dum *conus* sic secatur, ut sectio neque axem pertranseat, aut. basi non sit parallela, pro varia planæ illius sectionis ratione triplices efformantur planæ figuræ, nempe *Ellipsis*, *Parabola*, & *Hyperbola*. Quæ omnes communi nomine *sectiones conicae* appellantur.
- §. 462. **S**unt autem conii alii *recti* Fig. 211, quorum axis AB Tab. XII. ad basim CD perpendicularis est: alii *scaleni* Fig. Fig. 211. 212. quorum axis AB ad basim CD non est perpendicularis. Fig. 212.
- §. 463. **R**urfus *recti conii* alii sunt *orthogoni* Fig. 211. quorum axis æquatur semidiametro baseos: alii sunt *amblygonii* Fig. 213. quorum axis minor est semidiametro baseos: Fig. 213. alii demum sunt *oxygonii*, Fig. 214, quorum axis semidiametro Fig. 214. est major.
- §. 464. **E**llipsis fit, quando axis conii, secatur ad angulos obliquos, ducta sectione ab uno latere conii ad alterum latus, veluti EG Fig. 215. alias utique si axis conii perpendiculariter secaretur, sectione nimirum ad basim parallela MN, produceretur *circulus*, cum basis conii circularis sit.
- §. 465. **P**arabola fit, quando axis conii secatur aliqua sectione, lateri alicui parallela, veluti BC Fig. 216. Fig. 216.
- §. 466. **H**yperbole nascitur, quando sectio conii fit, quæ protracta occurrat lateri conii extra conum ut DE in B Fig. 217. N n 3 §. 467. Fig. 217.

§. 467. **L**ineæ vero, quæ ex conii sectionibus oriuntur, curvæ sunt, & exhibentur hoc schemate: *Linea elliptica* Fig. 218. *Linea parabolica* Fig. 219. *Linea hyperbolica* Fig. 220. Ex quibus apparet, quam lineæ hæ curvæ in vertice axis longius a centro recedant, quam circulus, & per consequens versus punctum verticis majorem concavitatem efforment.

§. 468. **A**xis est linea recta in plano sectionis ex vertice ad basim porrecta, dividensque basim bifariam, ut in *ellipsi* AH Fig. 218. quæ etiam appellatur *diameter major*; IK autem *diameter minor*. In *Parabola* AI Fig. 219: in *Hyperbole* AB Fig. 220. *Vertex* autem est supremum punctum A, in quo axis lineam curvam contingit.

§. 469. **C**hordæ sectionum, quas alii *ordinatas* vocant, sunt lineæ parallelæ, axim ad angulos rectos interfecantes, & ad ambitum figuræ exporrectæ. Tales sunt in *ellipsi* CD, IK &c. Fig. 218. In *Parabola* LM, HK, BC Fig. 219. In *Hyperbole* TU, PO Fig. 220. *Semiordinata* dicuntur media pars chordæ, ut in *Ellipsi* EC, OI Fig. 218. In *Parabola* EL, FH Fig. 219. In *Hyperbole* DP, CT Fig. 220.

§. 470. **C**entrum reflexionis, seu *focus* est punctum illud in axe, in quo *ordinata* parametrò æqualis est. In hoc radii omnes speculorum causticorum confluunt, veluti in *ellipsi* E Fig. 218. In *parabola* punctum F Fig. 219. In *hyperbole* punctum C Fig. 220.

§. 471. **A**bscissa, seu *sagitta* dicuntur illæ portiones diametri, quæ inter verticem, atque inter *ordinatas* vertici applicatas continentur v. g. in *parabola* AE, AF, AI Fig. 219. Harum *abscissarum* beneficio curvæ lineæ determinantur; sic *Tab. I.* *circulus* ab omni alia curva lineâ distinguitur per hoc, quod *Fig. 26.* *semiordinata* EF, inter diametrum AF, & *abscissam* FB sit media proportionalis (§. 39).

§. 472. *Parameter* dicitur illa recta invariabilis, a qua proprietates sectionum conicarum deducuntur. *Tab. XII.* *Fig. 219.* *Fig. 218.* *Fig. 220.* *Fig. 221.* *Fig. 222.* *Fig. 223.*
 lis est in parabola Fig. 219 HK, tertia nempe proportionalis inter abscissam AF, & semiordinatam FH. In ellipsi autem est CD Fig. 218. In hyperbole TU Fig. 220. Estque parameter ellipseos, & hyperboles tertia proportionalis ad diametrum transversam, & diametrum conjugatam. Est vero *diameter conjugata* linea AB Fig. 221, quæ lineas parallelas diametro in duas æquales partes secat. *Diameter transversa*, AB Fig. 222, est recta intra curvas continuata, secans bifariam rectas æquidistantes CD intra easdem curvas.

§. 473. *Est* itaque *Ellipsis* figura plana, quæ sic unica linea curva comprehenditur, ut reclarum ad axim ordinarum quadrata sint directe inter se, ut reclarum contenta sub correspondentibus portionibus axis, non tamen sint illis equalia. *Tab. XII. Fig. 223.* Sic ex semiordinata CM quadratum CSTM ita se habet ad quadratum DORN semiordinatæ DN: sicut parallelogrammum CFXB, compositum ex AC × CB se habet ad parallelogrammum DGKB, compositum ex AD × DB; attamen nec quadratum CSTM est æquale parallelogrammo CFXB, nec quadratum DORN parallelogrammo DGKB; quadrata enim sunt parallelogrammis minora. Atque ex hoc discrimen ellipseos a circulo interno-scitur; nam quadratum semiordinatæ EF (Fig. 26) est æquale parallelogrammo AF × FB. Nam EF est media proportionalis.

§. 474. *H*abet itaque ellipseos duplicem diametrum, quarum altera, omnium diametrorum longior, dicitur *axis major*: altera brevior dicitur *axis minor*; secant se autem hi duo axes ad angulos rectos. Aliæ diametri semper fiunt majores, quo magis ad majorem axem accedunt; & illæ, quæ æqualiter ab eodem axe distant, æquales sunt v. g. in ellipseos EGFH, sunt æquales diametri MP, & NO. *Tab. XII. Fig. 224.*

Bl§. 475. *Parameter* ellipseos est linea recta CA, tertia nempe proportionalis inter axem majorem CD (§. 474),
 &

& minorem US , quæ extremitati C axis majoris perpendicularis est. Igitur quadratum minoris axis UT , nempe $UMNT$, erit æquale quadrato $CD \times CA$ nempe parallelogrammo $CDBA$. Ast si volueris formare parallelogrammum æquale quadrato subordinatæ OP , non oportebit ex $CO \times CA$ illud formare, sed ex $CO \times CH$ vel OG ; quia nempe deficit. Atque ob hunc defectum hæc figura dicta est *ellipsis*, seu *deficiens*.

Tab. XII. §. 476.
Fig. ead.

Duos *focos* ellipsis habet, qui sunt duo puncta O , & K in majori axe CD , æqualiter a centro S & duplici vertice CD remota, quorum distantia a minoris axis extremitate U , nempe OU vel KU æqualis est dimidio axi majori CS ; a vertice vero C , & D tanta esse debet utriusque foci distantia, ut semiordinata OP foci O semiparametrum CA adæquet. Quod autem in *focis* ellipseos comprimis attendi debet, est, quod duæ rectæ, ex utroque *foco* ad perimetrum seu circumferentiam quomodocunque ductæ, sint æquales axi majori ellipseos. Sic $OE + EK = CD$. $OU + UK = CD$. $OF + FK = CD$. Item quod recta tangens IR debeat æquales angulos formare cum rectis, ex utroque *foco* ad centrum E tendentibus. Sic angulus $OEI = KER$.

PROPOSITIO I.

Tab. XII. §. 477.
Fig. 226.

Curvam ellipticam describere.
Ducatur recta linea BG , & assumpto puncto arbitrario A , ducatur ex eo circulus $BCDE$. Rursus assumpto puncto D fiat circulus $AFGH$. Ex punctis intersectionum I , & K per centra A , & D ducantur rectæ usque ad peripherias circulorum, nempe KAC , KDF , IAE , IDH . Denique posito circini pede in K , radio KC , ducatur arcus CF ; & iterum eodem radio ex I ducatur arcus EH , habeturque *elliptica* descripta.

SCHO-

S C H O L I O N.

§. 478. **Q**uod si vero axis major minorem longitudine multum superare debeat : ducantur duæ lineæ perpendiculares CD , & BA . Dividatur CE in tres æquales partes, CF , FM , ME . Linea quoque ED in tres ejuscemodi æquales partes dividatur. Jam ex centris F , & I , radiis FC , & ID describantur circuli $HCGM$, $NKDL$, atque ex A & B per centra circulorum F , & I ducantur utrinque rectæ, nimirum AFG , AIK , BFH , BIL . Denique posito circini pede in A , radio AG , ducatur arcus GK , iterumque posito circini in B , eodem radio, fiat arcus HL , & habebitur *ellipsis* oblongior mechanicè descripta. Tab. XII. Fig. 227.

C O R O L L A R I U M.

§. 479. **P**romptissime *ellipsis* cujuscunque magnitudinis sic describitur. Dentur duæ lineæ AB , & CD , quarum prior majorem, altera minorem ellipseos axem referat. Hæ duæ rectæ se fecent perpendiculariter in E ad partes utrinque æquales. Tum defigantur duo aculei ad æquales a centro E distantias in F , & G ; illigetur filum his aculeis ea longitudine, atque etiam ea aculeorum F & G dispositione, ut extremitas fili, ex F , & G tensi, ad quatuor puncta ellipseos A , C , B , D pertingat. Itaque ubi adhibito stilo filum illigatum, ea qua licet extensione in gyrum torseris, describes ellipticam lineam $ACBD$. Tab. XII. Fig. 228.
Q. E. F.

D E F I N I T I O N E S.

§. 480. **P**arabola est figura plana, quæ curva linea ABC in se non redeunte, continetur, cujusque abscissa BD , BI sunt inter se directe, ut correspondentium semiordinatarum DE , IR &c. quadrata, nempe $DSZE$: $IPQR$; Ideoque cum quadratum $IPQR$ sit ad quadratum $DSZE$ in ratione duplicata semiordinatarum DE , & IR (§. 185, & 186); quadrata autem $IPQR$, $DSZE$ se directe habeant ut abscissæ BD , BI : sequitur, quod & abscissæ BD , BI sint in duplicata ratione semiordinatarum DE , IR : Tab. XII. Fig. 229.

IR: semiordinatæ vero DE, IR sint in ratione subduplicata abscissarum BD, BI. (§. 105. *Arithm.*)

§. 481. *Parameter parabola* est recta BF, vertici axis B perpendicularis, quæ ad quamlibet abscissam v. g. BD, & ad correspondentem semiordinatam v. g. DE sit tertia continuo Geometricè proportionalis. Igitur si ex semiordinata D E, tanquam media proportionali, fiat quadratum DSZE, atque ex abscissa BD, & parametro BF fiat rectangulum BD GF: hoc rectangulum BDGF erit quadrato DSZE æquale (§. 176.) atque ab hac æqualitate *Parabola* nomen suum traxit: *Exemplar*, seu *similitudo*.

Fig. ead. §. 482. **F**ocum autem *Parabola* quod attinet, tria comprimis notanda sunt: 1mo. Eam esse foci D a vertice B justam distantiam, quæ sit quarta parametri pars. 2do. quod *Parabola* semiordinata v. g. DE æqualis sit semiparametro BF, quemadmodum etiam dictum est de *ellipsi*. 3tio. Denique, quod tangens MN debeat angulos æquales formare cum lineâ recta, axi BP parallela, in punctum H incidente, & etiam cum lineâ recta ex puncto foci ad punctum H ducta. Sic angulus MHT = NHD.

PROPOSITIO II.

Ta. XII. §. 483. *Parabolam Geometricè describere.*

Fig. 230.

Ducatur recta AB, ex cujus medio F excitetur perpendicularis FG (§. 24.) Hanc rectam FG transfer in lineam AB ex centro F utrinque bis, nempe ex F in T, ex T in A, ita ut AB sit quadrupla ipsius FG. Erit hoc modo F *centrum reflexionis*, seu *focus* (§. 482); & *Vertex Parabola*. Porro distantiam FG, & intervallum ipsi æquale TA vel TB, divide in quotcunque æqualia spatia (hic delegimus 6) numerosque adscribe, ut vides, & per singula divisionum puncta in lineâ GF due *normales*, seu *ordinatas* indefinitæ magnitudinis. Tum posito uno circini pede in centro reflexionis F, desume intervallum FO, manenteque eadem circini apertura transfer hoc inter-

tervallum ex F in primam *ordinatam* utrinque, nempe in C, & C. Iterum desumpto intervallo FN, transferatur illud in secundam *ordinatam*, nempe in D, & D. Atque ita per cætera divisionum puncta descendendo, deprehendentur in *ordinatis* defixa puncta CC, DD, EE, PP, QQ, AB. Denique si *Parabolam* ultra focum F continuare velis, adjice lineæ AB partes dividentes æquales, nempe 7, & 8 &c. & subjunge plures *ordinatas* in æquali ab invicem distantia, ad quas pariter intervallum F 7, & F 8 in RR, & SS depones. Tandem ubi puncta in singulis *ordinatis* inventa curvis lineis conjunxeris; ducendo primum ex puncto H arcum CGC, tum ex I curvam DC, & CD, reliquas curvas ex reliquis descendentes, & æquidistantibus punctis, habebis *Parabolam* Geometricè descriptam.

S C H O L I O N.

§. 484. **V**erum quoniam magnum *Parabolæ* segmentum Geometricè per lineas difficulter determinatur; e re esse videtur illud ope numerorum præstare.

P R O P O S I T I O III.

§. 485. *Parabola* segmentum pro speculis causticis per numeros determinare. Ta. XIII.
Fig. 231.
Ducatur recta BG in quocunque partes divisa, atque in puncto C ad angulos rectos interfecetur. Segmentum minus CB statuatur quocunque partium (hic 4 delegi) alterum segmentum majus CG statuatur pariter quocunque partium, v. g. 76 partium. Erit hoc modo B vertex segmenti *Parabolæ*; BG vero latus rectum 80 partium, cujus quarta pars BH 20 partium dabit *centrum reflexionis* in H. Porro in linea BC per singula divisionum puncta ducantur *normales*, id est, *semiordinata* CA, DU, IO, MN, quæ tandem per numeros sic determinantur:

Primo, lineam $BC = 4 \times BG = 80$ part. fietque rectangulum $= 320$, cujus radix quadrata $17\frac{2}{5}$ manifestat *semiordinatam* AC. Quia nempe in *Parabola* quadratum cujuscunque
O o 2
semi-

femiordinatæ æquale est rectangulo sub segmento axis & latere recto (§. 481.)

Secundo, ut $BC = 4$ ad quadratum $AC = 320$, ita $BD = 3$ ad quadratum $DU = 240$, cujus radix quadrata $15\frac{1}{5}$ est femiordinata DU .

Tertio, ut $BC = 4$ ad quadratum $AC = 320$, ita $BI = 2$ ad quadratum $IO = 160$, cujus radix quadrata $12\frac{1}{2}$ est femiordinata IO .

Quarta, denique $BC = 4$. $\square AC = 320$: $BM = 1$. $\square MN = 80$. cujus radix quadrata 9 est femiordinata, MN . Quia nempe in *parabola* sicut se habet distantia a vertice ad quadratum femiordinatæ, a qua secatur: ita alia quæcunque distantia a vertice ad aliud quadratum femiordinatæ, a qua secatur.

SCHOLIUM.

§. 486. **Q**uoniam autem *conorum* alii sunt *orthogoni*, alii *amblygonii*, alii *oxygonii* (§. 463.) in quibus alii necessario sunt *axes*, aliæque *ordinatæ*; breviores nimirum, & longiores, ideo juverit problema afferre, in quo dati cujusque conii *sectio parabolica* determinetur.

PROPOSITIO IV.

Ta. XIII. §. 487. **D**ato cono *Parabolam inde describere.*

Fig. 232.

Sit conus datus ABC , in quo *sectio parabolica* FG . Ducatur primum recta GK , basi parallela, secabit hæc axem in T ad angulos rectos. Tum portio axis TI dividatur in quotlibet æquales partes, & per hæc ducantur rectæ ML , ON , QP , SR , omnes pariter basi parallelæ, atque ex punctis, ubi axem interfecant, ducantur semicirculi, LYM , NXO , PUG , RZS , BHC , quorum diametri sint parallelæ dictæ. In quarum singulis femiordinatas ita determinabis: Ex punctis D , E , O , Q , F , in quibus parallelas *sectio parabolæ* FG interfecat, duc *normales*, seu parallelas axi ad singulorum circumferentias, nempe DY , EX , OU , QZ , FH , & habebis femiordinatas pro *parabola* quæsitæ.

His

His ita constitutis, alicubi seorsim duc rectam FD indefinitæ magnitudinis, super quam excita perpendicularem FG , æqualem sectioni *coni*, quam in totidem partes divide, in quot portionem axis TI divisisti, atque per singula divisionum puncta duc rectas, ipsi lineæ HD parallelas: Tum semiordinatas DY , EX , OU , QZ , FH transfer in illas utrinque, & puncta imprime, quæ conjuncta curvis lineis dabunt parabolam desideratam.

COROLLARIUM.

§. 488. **P**aratur etiam *conus* ligneus torneatoris arte, hicque secatur sectione, lateri cuidam parallela BC Fig. 216. ut tandem linea illa parabolica, in charta segmento ligneo applicata facilius possit designari.

DEFINITIONES.

§. 489. **H**yperbole est figura plana; quæ linea pariter curva *Ta. XIII.* BAC , in se non redeunte comprehenditur, in *Fig. 233.* qua cujuslibet semiordinatæ v. g. DS quadratum $DILS$, sit ad alterius semiordinatæ quadratum $ERXT$, sicut rectangulum $NDWU$ ex linea certæ magnitudinis $NA + AD$, & abscissa correspondente $AD = DW$ compositum se habet ad alterum rectangulum $NEQZ$. Ex $NA + AE$ & abscissa correspondente $AE = EQ$ compositum, ita ut $DILS. DRXO :: NDWU. NEQZ$.

§. 490. **P**arameter AG nempe linea axis vertici A perpendicularis debet in hyperbola sic esse comparata, ut sic se habeat ad axem transversum AN , sicut quadratum $DILS$ ad rectangulum $DNWU$. *Fig. ead.*

§. 491. **J**am vero ducatur recta NM ex vertice N axis transversi AN per extremum parametri G , atque ut ex cujusque semiordinatæ v. g. $DILS$ æquale rectangulum ex abscissa AD constituatur, non sufficit Parameter AG , sed debet protrahi in Y ita ut quadratum $DILS = ADHY$, non

véro A D O G. Propter hunc *parametri* excessum *hyperbole*, id est *transgressio* nomen suum obtinuit.

§. 492. **A**Xis conjugatur *Hyperboles* dicitur recta P Q, quæ est media proportionalis inter axem transversum A N, & parametrum A G. punctum F est focus *hyperbolis* &c.

Tab. XIII. Fig. 234. §. 493. **Q**Uod si lineam *hyperbolicam* ducere sit animus, nempe HGD procedes eadem prorsus semita, quæ (§. 487.) indicatur, nisi quod sectio propria GF pro axe *Hyperboles* assumatur, ut figura ostendit.

§. 494. *Asymptoti* dicuntur illæ lineæ *intacta*, quæ ad curvas continuo se magis, & magis inclinant, nunquam tamen cum iisdem concurrunt, etsi in infinitum protendantur. *Tab. XIII. Fig. 235.* Ejusmodi *asymptotos* Apollonius Pergæus *Lib. II. Conicorum.* Hyperbolæ attribuit, nempe MN; & NO respectu SXZ;

Cum enim sectio hyperbolica protracta lateri conii occurrat (*Tab. XII. Fig. 217.*) nunquam fiet, ut aut axis hyperbolæ ED, aut curva hyperbolica latera cum axe conii BG aut cum rectis conii lateribus concurrant.

Finis Institutionum Geometriæ.



INSTITUTIONES TRIGONOMETRIÆ.

CAPUT I.

De Principiis Trigonometriæ.

§. 1. **T**rigonometria est facultas, quæ docet ex tribus datis trianguli partibus, proportionis auxilio, ceteras ignotas invenire. Hæc ab Hipparcho olim & Menelao inventa; tum a Ptolomæo, atque compluribus recentioris ævi, veluti Regiomontano, Wolffio &c. exculta, inventione Logarithmorum per Joannem Neperum Nobilem Scotum, maximum cepit incrementum.

§. 2. **D**uplex est Trigonometria: altera plana, quæ in triangulis rectilineis; altera spherica, quæ in sphericis occupatur. Nos de plana agemus primum; tum de spherica nonnihil delibabimus.

§. 3. **S**ex sunt trianguli cujuslibet partes, nempe Latera tria, & tres anguli. Dimensiones Laterum atque angulorum beneficio scala geometrica, & Transportatorii exposui §. 108. & seqq. Geomet. hic juvabit de illis potissimum Laterum & angulorum dimensionibus agere, quæ per sinus, tangentes, & secantes, eorumque logarithmos innotescunt.

§. 4. **C**irculi peripheria mathematicis in 360 partes æquales dividitur (§. 234 Geomet.) quæ gradus appellantur; quilibet rursus gradus subdividitur in 60 minuta, horum quodlibet in 60 secunda &c. Arcus circuli, qui e centro inter duo crura recta describuntur, dicuntur angulorum mensura, v. g. FC, angu-

Tab. I. anguli FAC, angulusque A tot dicitur esse graduum, quot
Fig. I. graduum est arcus FC.

§. 5. **C**irculo inscribuntur lineæ rectæ subtendentes circum-
 larem arcum, quæ vel *subtensæ* vel *chorda* appellantur. v. g. CK, CP. Ipsa quoque diameter FI, quæ centrum A pertransit, *chorda maxima* nominatur.

§. 6. **S**inus est chorda dimidia, v. g. CH, KH, CG, PG; ipsa dimidia diameter AB *sinus maximus*, seu *sinus totus* dicitur. Dividitur autem sinus in sinus *rectum*, & sinus *versum*. Sinus *rectus* est, qui sinui toti perpendiculariter insistit. v. g. CH est sinus rectus arcus FC; & CG est sinus rectus arcus CB; & GP est sinus rectus arcus BP. Sinus *versus*, qui etiam *sagitta* dicitur, est illa Semidiametri pars FH, quæ inter sinus rectum GH, & inter hujus sinus recti arcum FC interjacet, critque FH sinus *versus* arcus FK vel FC; & GB erit sinus *versus* arcus CB vel PB.

§. 7. **T**am sinui *recto*, quam *verso* suus est sinus *complementi*, seu *cosinus*, qui nempe arcus dati complementum subtendit, v. g. CH est sinus rectus arcus FC; sinus complementi hujus arcus est CG; quia nempe arcus CB complementum arcus FG est. Rursum quia CG est sinus *rectus* arcus CB; igitur CH est sinus complementi arcus CB. Porro FH est sinus *versus* arcus FC, & GB est sinus *versus* complementi arcus FC; & vicissim FH sinus *versus* complementi arcus CB.

§. 8. **O**mnis sinus *rectus* subtendit duos arcus, quorum alter quidem minor, alter major quadrante est. v. g. CH est sinus rectus arcus FC, qui quadrante quidem minor est; alter tamen arcus CBPI, qui itidem a sinu CH subtenditur, major quadrante est, & passim *complementum ad medium circumulum* dici consuevit; quanquam *complementi* nomine communiter intelligitur complementum ad quadrantem; atque ideo tabellæ sinuum receptæ non exhibent ullos sinus arcuum, qua-

quadrante majorum; Nam sinus CH sive concipiatur habere pro complemento arcum CBPI, = 120° , qui hoc obtusangulo CAI comprehenditur; sive habere concipiatur pro complemento arcum CB = 30° , qui hoc acutangulo CAB continetur, semper æqualiter magnus est.

§. 9. Sinus quoque *versus* duplex est: alter *minor*, nempe FH, qui minor est radio circuli AF; alter *major*, nempe HI, qui major est circuli radio AI: *minor* FH subtendit arcum FC, quadrante minorem: *major* HI arcum alterum CBPI, qui quadrante est major, subtendit.

§. 10. *Tangens* est illa recta linea, ad rectos angulos innixa extremo radii puncto, atque usque ad secantem excurrentem; v. g. recta FE, quæ respondet arcui FC, & opposito angulo FAG. *Tangens* vero arcus *complementi*, quæ & *cotangens* dicitur, est illa recta linea DB, quæ arcui complementi CB, & opposito angulo CAB respondet.

§. 11. *Secans* est recta linea, ex centro ad peripheriam ducta, atque ad tangentem usque continuata. v. g. AE est *secans* arcus FC. *Secans complementi* est illa recta, quæ arcum complementi secat, velut AD est *secans complementi* CB.

§. 12. Quod si trianguli ABC, *basis* AB, pro radio circuli *Tab. 1.* assumatur, *cathetus*, seu latus CB angulo acuto CAB *Fig. 2.* oppositum, erit *tangens*; *hypothenusæ* seu latus AC angulo recto ABC oppositum, erit *secans*; & AB sinus totus: sin autem ex puncto C describatur circulus, atque pro radio constituatur cathetus CB, erit *basis*, seu latus AB, angulo acuto ACB oppositum *tangens*; *hypothenusæ* autem seu latus AC, angulo recto ABC oppositum, *secans*; ac tandem CB sinus totus. Vides, ut hypothenusæ utriusque acuti anguli est *secans*. Quod si demum *hypothenusæ* AC pro radio circuli assumatur, *secans* nulla erit;

erit; nullum quippe trianguli latus extra peripheriam circuli protendetur.

Tab. I. §. 13. **T**Riplici autem modo triangula circulis inscribi con-
Fig. 3. sueverunt: Primo, ut modo dictum est, quodpiam
 trium laterum pro radio assumendo. Secundo cum hypothe-
 nusa MN assumitur pro diametro circuli. *Fig. 3.* Tertio cum
 triangulum ita circulo inscribitur, ut nullum latus centrum
 contingat, neque etiam ullum extra peripheriam protendatur,
Fig. 4. ut in *figura quarta* elucet.

Tab. §. 14. **I**llud autem Tirones mente defigere præ cæteris de-
Fig. 3. bent: tres cujuslibet trianguli angulos efficere 180
 gradus, id est, angulos duos rectos (§. 77. *Geomet.*) Æquivalet
 quippe triangulum semicirculo; siquidem centrum circuli ca-
 piatur intra latus quodpiam trianguli. v. g. C. Examinentur
 enim ejusdem trianguli MNS quomodocunque, semper 180 gra-
 dus numerabuntur; interni quippe anguli trianguli cujuscun-
 que æquivalent duobus rectis. Cognitis autem duobus an-
 gulis semper innotescet tertius. Si numeros graduum in
 duobus angulis cognitos subtraxeris a 180 gradibus; residuum
 nempe dabit gradus anguli quæsitæ. Jam in triangulo rectan-
 gulo, si unus angulus acutus sit cognitus, habebis notitiam al-
 terius acuti incogniti, ubi nimirum gradus acuti illius cog-
 niti a 90 subtracti fuerint; nam residuum exhibebit gradus alte-
 rius acuti anguli quæsitæ.

§. 15. **D**Enique omne triangulum sex partes complectitur:
 tria nimirum latera, & tres angulos; ex his sex
 partibus, cum tres sunt duntaxat cognitæ, tres aliæ incogni-
 tæ, beneficio trigonometriæ, eruuntur. Sic cognito uno la-
 tere & angulis duobus, innotescunt cætera latera cum angulo
 incognito. Cognitis duobus lateribus & uno angulo, pariter
 innotescit latus alterum, cum angulis incognitis; Porro datis
 lateribus tribus, sponte sua tres illi anguli intercepti patefcunt.
 Quod si vero tres solum anguli sint noti, nunquam ad noti-
 tiam

tiam laterum deveniri poterit; siquidem triangula similia æquales angulos habent, quamvis unum ejusmodi triangulorum altero sit majus, id est, majora habeat latera (§. 87. *Geomet.*) Hæc vero omnia juverit iterum ac sæpius in chartis delineata oculis exhibere, ut tandem mens, repetitis usibus condocefacta, ad abstractiones sese transferat, noveritque consimiles angulos in campis, fluviis, in aëre, atque in ipsis vastissimis cœlorum spaciis intueri.

CAPUT II.

De Inventione Sinuum, Tangentium,
& Secantium.

§. 16. **I**nvenire Sinus, Tangentes & Secantes, est eorum proportionem ad radium circuli aut veram, aut a vera insensibiliter aberrantem exprimere; hæcque expressio potissimum fit per *Logarithmos*, ut infra dicitur.

PROPOSITIO I.

§. 17. **D**ato quocunque sinu v. g. AD arcus FGA invenire sinum Tab. I.
complementi AB. Fig. 5.

Ducatur radius EA, hujus quadratum æquale est quadratis duorum laterum AD & DE vel AB & BE (§. 96. *Geomet.*) Ex hoc quadrato radii EA subtrahatur quadratum dati sinus, id est, lateris AD, seu BE, & remanebit quadratum lateris AB vel DE. Ex hoc rursus quadrato extrahatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*) hæcque dabit rectam AB, seu sinum complementi quæsitum.

PROPOSITIO II.

§. 18. **I**nvenire sinum arcus graduum 45. Tab. I.
Quadranti ABC subtende rectam AB; supra hanc Fig. 6.
Pp 2 rectam

rectam AB demitte ex centro C perpendiculararem CED; hæc biffecabit æqualiter arcum AB 90 graduum in D, ita ut finus DS fit 45 graduum.

Nam quia latera CA & CB æqualia funt (§. 232 *Geomet.*) erunt eorum quoque anguli CBA & CAB æquales; cum trianguli *ifofcelis* anguli ad basim fint æquales (§. 93. *Geomet.*). Sed angulus ACB est rectus; ergo anguli CBA, CAB funt femirecti. In omni enim triangulo tres anguli simul sumpti æquales funt duobus rectis (§. 77. *Geomet.*). Porro anguli CEB & CEA funt recti, & anguli CBA & CAB ex dictis funt femirecti; ergo etiam anguli ECB & ECA funt femirecti (§. 77. *Geomet.*); & latera AE & BE funt æqualia. Jam vero quadratum lateris CB æquivalet quadratis duorum laterum CE & BE, (§. 96. *Geomet.*): ergo si finus totus est graduum 90, semiffis subtensæ AE vel BE erit graduum 45. Denique subtensæ AB semiffis, cum fit etiam finus semiffeos ejusdem arcus ADB, erit etiam finus DS graduum 45, & $DS = AE$ vel BE.

§. 19. **E**X invento finu 45 graduum reperiuntur alii finus, nempe finus 45 graduum semiffes funt 22, 30; cujus iterum semiffes funt 11, 15. Sinus 22, 30 finus *complementi* est 67, 30; finus autem 11, 15 finus complementi est 78, 45. Sinus 67, 30 semiffes funt 33, 45; horum finuum complementa funt 56, 15.

PROPOSITIO III.

Fig. ead. §. 20. **I**nvenire finum arcus graduum 60 & 30.

Sit arcus 60 graduum ADF, erit subtensa seu latus AF = FC vel AC, nempe radio, seu finui toti (§. 286. *Geomet.*)

Geomet.). Ex F demittatur recta in G, nempe sinus 60 graduum; erit autem G in medio sinus totius AC; ita ut si sinus totus AC sit 90 partium, CG sit partium 45. Jam vero quadratum lateris CF æquivalet quadratis duorum laterum FG & GC, (§. 96. *Geomet.*): Igitur detracto quadrato lateris GC, cujus radix sit 45, a quadrato lateris CF, cujus radix sit 90, remanebit quadratum sinus FG 60 graduum, cujus radix quadrata dabit rectam FG.

§. 21. **C**onsimili prorsus ratione inveniatur sinus arcus 30 grad. Ex his porro sinibus 60 & 30 graduum repertis plurimi reperiuntur alii. Sinus quippe 60 graduum semissis est 30; hujus semissis est 15; hujus porro 7, 30; ac hujus tandem semissis 3, 45. Jam hi sinus omnes sua habent complementa; sinus 60 sinus complementi 30; sinus 15 complementum 75; sinus 7, 30 cosinus 82, 30; ac sic porro. Hæc complementa suas rursus habent semisses; hæque semisses sua denuo complementa; ita ut ex duobus hiis sinibus nempe 60, & 30, facile sinus 16 alii cognoscantur.

PROPOSITIO IV.

§. 22. *Sinum 36 graduum invenire.*

In Semicirculo ABC præparetur latus pentagoni EB circulo inscripti (§. 289. *Geomet.*). Quadretur summa radii, seu sinus totius DB, quadretur item semissis radii DF, atque ex summa quadratorum addita eliciatur radix quadrata (§. 146. *Aritbm.*); dabit illa radix rectam FB, quæ est etiam FE. Ex FE auferatur semissis radii DF, & remanebit DE, cujus DE quadratum addatur quadrato DB, & innotescet quadratum EB; ex quo si eliciatur radix, habebitur recta EB, latus pentagoni, circulo inscripti, subtendens gradus 72, cu-

Tab. I.
Fig. 7.

jus sinus est MN; hujusque sinus semiffis erit graduum 36; nempe HI,

§. 23. **S**emiffis vero cujusdam sinus v. g. MN, hac ratione reperitur: ex A in M recta subtenditur AM; in hanc ex centro D demittitur perpendicularis DOH; & AO vel HI erit sinus semiffis ipsius sinus MN, adeo, ut si MN est sinus graduum 72, HI sit graduum 36.

§. 24. **E**X hoc sinu graduum 36 reperto, alii sinus 32 reperiuntur; semiffes nempe semiffison, harumque semiffison varia complementa, & complementorum rursus semiffes, quod inquirenti patefcet.

PROPOSITIO V.

Tab. 1.
Fig. 8.

§. 25. **I**nvenire sinum 12. graduum.

Sinus 60 NF (§. 20.) inventi constituatur sinus complementi 30, nempe NG; tum sinus 36 MK (§. 22.) inventi, constituatur sinus complementi MH graduum 54; differentia M & N erit graduum 24: Igitur si ex quadratis SM & SN extrahatur radix quadrata (§. 146. *Aritbm.*); dabit hæc subtensam MN 24; illius vero semiffis dabit sinum graduum 12.

Ex hoc sinu 12 graduum reperto inveniuntur alii facile sinus 64 modo ac methodo mox insinuata.

§. 26. **H**Æc itaque est proportio ad radium

Sinus 60 semiffis trigoni.

Sinus 30 semiffis hexagoni.

Sinus 45 semiffis tetragoni.

Sinus

Sinus $\overset{\circ}{36}$ semiffis pentagoni.

Sinus $\overset{\circ}{18}$ semiffis decagoni.

Sinus $\overset{\circ}{12}$ semiffis quindecagoni.

PROPOSITIO VI.

§. 27. *S*ecantes quascunque v. g. AH invenire.

Tab. 1
Fig. 9.

Arcus $\overset{\circ}{60}$ CE sit inventus sinus ED, pariterque complementi sinus EG (§. 20;) adhibita regula *proportionum* reperietur facile secans AH; nam ut EG sinus complementi, vel DA ad AE: ita CA sinus totus ad AH secantem quæsitam; sunt quippe quatuor proportionales (§. 40. *Geom.*)

PROPOSITIO VII.

§. 28. *T*angentes quascunque v. g. HC invenire.

Fig. ead.

Sit inventus sinus ED arcus $\overset{\circ}{60}$ CE, sitque inventus sinus complementi EG; adhibeatur regula *proportionum* dicendo: ut sinus complementi EG vel AD ad dati arcus sinum ED: ita sinus totus AC ad tangentem quæsitam HC.

PROPOSITIO VIII.

§. 29. *R*adius AC est media proportionalis inter tangentem FC, & Tab. I.
tangentem complementi BO; seu: $\therefore BO, AC, CF.$ Fig. 10.

Nam in rectangulo BH est AH = BO, & AB = HO; & triangula OAH & FAC sunt æquiangula, habentia singula angulum rectum H & C, atque angulum A communem: igitur AH, HO :: AC, CF; atqui BO = AH, & HO = AB: ergo BO, AC :: AC, CF, seu: $\therefore BO, AC, CF.$
Q. E. D.

CA-

CAPUT III.

De Logarithmis, & Tabularum usu.

§. 30. **L**ogarithmi sunt numeri arithmetice proportionales, respondentes numeris geometricè proportionalibus; quemadmodum sequenti tabula exhibetur.

| Geom. Prop. | Logarithmi | | |
|-------------|------------|----|----|
| 1 | 1 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 5 | 10 |
| 4 | 3 | 7 | 20 |
| 8 | 4 | 9 | 30 |
| 16 | 5 | 11 | 40 |
| 32 | 6 | 13 | 50 |
| 64 | 7 | 15 | 60 |
| 128 | 8 | 17 | 70 |
| 256 | 9 | 19 | 80 |
| 512 | 10 | 21 | 90 |

§. 31. **E**st hæc itaque Logarithmorum proprietas, ut si quatuor numeri geometricè fuerint proportionales, extremi duo Logarithmos habeant æquales Logarithmis duorum mediorum; v. g. 2, 4, 8, 16 sunt numeri geometricè proportionales, quorum logarithmi sunt: 10, 20, 30, 40; extremorum duorum logarithmorum nempe 10 & 40 = 50 summa æqualis est summæ logarithmorum mediorum, nempe 20 + 30 = 50. Aut sint logarithmi 2, 3, 4, 5. Logarithmi 2 + 5 = 3 + 4 = 7; unde factum est, ut cum regula proportionis multiplicatione & divisione peragatur (§. 79. *Arithm.*); hæc autem in majoris numeri expressione permolesta sit; ut inquam *Joannes Neperus Nobilis Scotus præclarissimo invento docuerit*

dequerit quartum proportionalem numerum sola additione & subtractione in logarithmis reperire; nam ut trium proportionalium numerorum quartus geometricè proportionalis inveniatur, v. g. 2, 4, 8; necessum est tertium 8 multiplicare per secundum 4, habebunturque 32; hæc 32 rursus si per primum 2 dividantur, prodibit quartus numerus proportionalis nempe 16; qui ita se habeat ad 8, ut 4 ad 2. In Logarithmis vero quibuscunque respondentibus. v. g. 2, 3, 4, cum tertius & secundus additi fuerint, ut sit summa 7, & primus nempe 2 subtrahatur, habebitur quartus arithmetice proportionalis nempe 5.

§. 32. **Q**Uamvis vero Logarithmorum species ad libitum assumi queant, commodissima tamen illa est, quæ cyphram 0 ponit pro Logarithmo unitatis; numeri 10 Logarithmum 10 000 000; numeri 100 Logarithmum 20 000 000; numeri 1000 Logarithmum 30 000 000 &c. si namque unitatis Logarithmus assumatur 0; tunc Logarithmus facti v. g. 24 æqualis erit Logarithmo factorum nempe 4 & 6; Geometricam quippe proportionem referunt termini 1. 4 :: 6. 24; & horum Logarithmi 0, 1, 2, 3 proportionem arithmeticam.

§. 33. **N**UMERI *characteristici* sunt illi initiales Logarithmorum numeri, qui puncto ab aliis separantur, indicantque, quot characteribus numerus absolutus constat; sic cum ab 1 usque ad 10 exclusive *characteristica* Logarithmorum sit 0; a 10 usque ad 100 *characteristica* sit 1; a 100 usque ad 1000 *characteristica* sit 2; a 1000 ad 10000 *characteristica* sit 3 &c. facile patefcet ex hoc Logarithmo: 2. 8450980 numerum absolutum nempe 700 intra centenarios contineri; hinc *characteristica* Logarithmi semper est unitate minor numero characterum numeri absoluti; & datus numerus absolutus v. g. 1752 intelligitur pro *characteristica* Logarithmi habere debere 3.

§. 34. **S**INUS totus, sive radius assumitur passim esse partium 10.000 000; quod si tamen characterum multitudo

operationem molestam redderet, licebit duas, tres, pluresve cyphras posteriores a sinu toto refecare, quo tamen casu totidem ab aliis sinibus, tangentibus, & secantibus characteres auferentur, ut nempe harum cum sinu toto proportionis constituantur. Sit sinus totus partium v. g. 10 000; demptis cy-

phris tribus; erit 24 sinus 4067; qui tamen in Tabulis Vlacquianis numero 40673. 66 exprimitur.

§. 35. **Q**uoniam vero *Brigii* tabula logarithmos numeris ab solutis ab unitate usque 10000 tantummodo coordinatos exhibet; si forte eveniat, ut numeri absoluti majoris v. g. 57346 inveniendus sit logarithmus, hac res ratione debet peragi: ex dato numero majore tot posteriores characteres demuntur, quot characteribus datus hic numerus major numeros absolutos tabulæ Brigianæ excedit; remanebit itaque 5734; cujus quærat logarithmus, qui erit 3. 7584577; hic logarithmus subtrahatur a proxime sequenti, nempe 3. 7585334, & remanebit differentia logarithmica 757. Jam quoniam demptus numerus 6 adhuc dum deest; adhibeatur regula *Proportionis*, seu *Trium* (§. 79 *Arithm.*) dicendo: sic se habet 10 ad differentiam logarithmicam 757. sicut 6 ad quartum proportionalem quærendum, prodibitque $454\frac{2}{5}$; hæc $454\frac{2}{5}$ addantur logarithmo minori, antea invento, nempe 3. 7584577, habebiturque summa 3. 7. 85031 $\frac{2}{5}$. Denique cum numerus datus absolutus major 57346 quinque characteres complectatur, debet characteristica 3 in 4 mutari (§. 33). ita ut hujus numeri 57346 logarithmus inventus sit 4. 7585031 $\frac{2}{5}$; quæ ultima fractio ob rei exilitatem negligi poterit.

§. 36. **Q**uod si rursus logarithmus major cunctis in tabula Brigiana positus constituantur; v. g. 4. 7585031 $\frac{2}{5}$. hujusque necessarium sit numerum absolutum invenire, methodo inversa decurret operatio: Logarithmi *characteristicam* minorem, atque etiam numerum finalem minorem habentis v. g. 3. 7584577 quærat absolute nempe 5734. Mox dictus

Etus logarithmus subtrahatur a proxime majori 3. 7585334, remanebunt 757. Rursus logarithmus datus minor nempe 3. 7584577 a dato majori nempe 4. 7585031 nulla habita ratione *characteristica* subtrahatur, remanebit 454; fiat tandem regula proportionis dicendo: sicut se habet 757 ad 10 (numeri quippe *characteristici* 3, & 4 tantummodo unitate differunt) ita se habebunt 454 ad quartum quæsitum nempe 6; tum numerus 6 subjungitur prioribus 5734, & habebitur dati logarithmi numerus absolutus 57346.

§. 37. EA porro ratione *Tabula Placquiana* comparatæ sunt,

ut *sinus*, *tangentes*, & *secantes* arcuum, qui 45 non excedunt, perpetuo in sinistris paginis, una cum suis minutis, occurrant; prima quidem in columna *sinus*, in altera *tangentes*, in tertia *secantes*; in quarta *logarithmi sinuum*; in quinta *denarum tangentium logarithmi*; quibus in pagina opposita a dextris nempe, complementa datorum arcuum respondent. Ar-

cuum autem 45 excedentium sinus in dextris paginis sunt collocati pariter cum minutis, quibus in sinistra itidem com-

plementa respondent v. g. sinus arcus 27. 23' invenire oporteat; invento primum in sinistra pagina numero graduum 27, descendatur ad 23 usque minuta; numerus 45994. 15 ibidem expressus notabit sinus quæsitum. Porro invenien-

us sit sinus arcus 56, 32'; quæretur in paginis dextris numerus graduum 56, tum ab infra ascendendo ad minuta 32 perveniatur; ibi expressus erit sinus quæsitus 83420. 68; cujus complementum in parte adversa erit 55145. 18.

§. 38. Quid si datus arcus, cujus oporteat sinus quæ-
re, major quadrante, id est 90 fuerit, v. g. 123.

Q q 2

27;

27' ; subtrahatur 123, 27' a gradibus 180, & remanebunt 56.
33. supplementum nempe anguli , cujus sinus est 83436. 72.

§. 39. **S**I quis igitur in trigonometricis dimensionibus ver-
sari gnauiter cupit ; Tabulas *sinuum* , *tangentium* , &
secantium Adriani Vlacq. pro cognoscendis angulorum gradibus
sic adhibebit ; ut tamen pro linearum numeris absolutis , seu
partibus tabulam logarithmorum *Brigii* assumat , quæ tabulis
sinuum passim est subnexa. In exemplo : velit quis triangu-

Tab. I. lum ABC totum cognoscere , cujus angulus C sit rectus 90,
Fig. II. latus AB 36 $\frac{6}{8}$ pedum ; latus CB 21 pedum ; fiet hoc mo-
do : sicut se habet latus AB = 36 $\frac{6}{8}$ pedum ad angulum
oppositum 90 , nempe rectum : ita latus CB = 21 pedum
ad angulum oppositum A incognitum.

$$\begin{array}{r} \text{log. } 2. \overset{36''}{5634811} \quad \text{log. } 10. \overset{90^\circ}{0000000} \quad \text{log. } 2. \overset{21'}{3222193} \\ \hline \text{10. } 0000000 \quad \text{add.} \\ \hline \text{12. } 3222193 \\ \text{2. } 5634811 \quad \text{subt.} \\ \hline \end{array}$$

Sin. 9. 7587382

Qui logarithmus 9. 7587382 notat 35 gradus pro angulo A.

§. 40. **U**Bi advertendum est , quod cum prima propositio
in decimas resoluta sit , etiam tertiam propositio-
nem in decimas resolvi oportere (§. 82 *Arithm.*) Tertius quo-
que angulus B facile innotescit ; Cum enim tres triangulo-
rum quorumcunque anguli duos rectos , id est 180 gradus ef-
ficient ; angulus autem C = 90 , & A = 35 sit , angulus
tertius B erit = 55 (§. 14). Restat igitur latus AC inqui-
rere methodo priori :

| | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| angul. C = 90° 10. 0000000 | lat. AB = 366'' 2. 5634811 | angul. B = 55° 9. 9133645 2. 5634811 add. <hr style="width: 100%;"/> 12. 4768456 10. 0000000 subtr. <hr style="width: 100%;"/> 2. 4768456 |
|-------------------------------|-------------------------------|--|

Hic logarithmus 2. 4768456 notat latus AC = 300''

CAPUT IV.

De Analyfi Triangulorum Rectangulorum.

§. 41. **T**riangulorum latera, quæ extra circulum *basis*, *ca-*
thetus, & *hypothenufa* dicuntur (§. 73 *Geomet.*) intra
 circulum alias denominationes indipiscuntur; Nam si trian- *Tab. 1.*
 guli *basis* AB pro radio, seu *sinu toto* assumitur, dicetur *cathe-* *Fig. 12.*
rus CA *tangens*, & *hypothenufa* CB *secans*. Quod si vero centrum *Fig. 13.*
 constituatur in C, dicetur CA *sinus totus*, AB *tangens*, & CB
secans. Si denique *hypothenufa* CB pro radio circuli accipia- *Fig. 14.*
 tur, dicetur CB *sinus totus*, & *catetus* CA erit *sinus rectus* an-
 guli B; *basis* demum AB, vel CG dicetur *sinus complementi*.

Sequuntur *Problemata*, quæ quidem duplici ratione
 resoluta exhibebuntur; primum per *sinus*, & *tangentes*; tum
 per eorum *logarithmos*. Sit

PROBLEMA I.

§. 42. **D**atis duobus lateribus AC = 24, & AB = 20 cum angulo *Tab. 1.*
 recto A, reliquos duos angulos acutos C & B invenire. *Fig. 15.*

Sicut se habet AB = 20 ad sinum totum; ita se habet
 AC = 24 ad tangentem anguli ABC; nempe

Q 9 3

AB

$AB = 20$. Sin. tot 100000.00. $AC = 24$. tang. ang. A BC Prodit factum 120000.00 tangens nimirum AC; qui numerus cum in tabulis *Vlacquianis* non exhibeatur, accipitur proxime accedens nempe 119952.76. qui in dictis tabulis tangentem 50° , $11'$ notat.

§. 43. **A**lia ratione positio hæc institui potest: sicut se habet latus $AB = 20$ ad latus $AC = 24$; ita se habet sinus totus 100000.00 ad tangentem quæsitam anguli B.

20. 24 :: 100000.00 . Tangens quæsitâ. habetur æque productum 120000.00; cui proxime æqualis tangens in tabulis reperitur 119952.76. id est: 50° . $11'$.

§. 44. **Q**uod si præter gradus, & minuta etiam *secunda*, & *tertia* scire aveas; tum a *tangente* proxime majori in tabulis nempe 50° . $12' = 120023.73$ subtrahæ proxime minorem, nempe 50° . $11' = 119952.76$

7097 differentia.

Rursum ab inventa tangente 120000.00 subtrahatur pariter proxime minor tangens 119952.76

4724 differentia.

Nunc fiat regula *proportionis* dicendo: sicut se habet 7097 ad 3600 , id est, ad 60 *minuta secunda*, per 60 *tertia* multiplicata: ita se habent 4724 ad quartum numerum proportionalem; habebiturque factum $2396''$. Hæc redigantur divisionis beneficio in *secunda*; & prodibunt $39''$, $56''$. Ita ut angulus ABC sit 50° . $11'$. $39''$. $56''$.

§. 45. **P**robæ loco inveniatur angulus ACB, qui una cum angulo invento ABC angulum rectum seu 90 gradus

dus efficiat : latus CA assumatur pro *sinu toto* ; AB vero pro tangente anguli C ; dicaturque :

AC = 24. Sin. tot. 10000. 00 : : AB = 20. tang. ang. C. peracta operatione juxta *regulam trium* (§. 79. *Aritbm.*) erit factum 83333. 33. Hinc numero proxime æqualis habetur in tabulis

83316. 86. nempe *tangens* 39. 48. qui a priori subducitur , & remanent 1647. Rursus assumatur tangens proxime major

nempe 39. 49 = 83366. 15, & subducatur a mox præcedente 83316. 86, remanebunt 4929. Denique adhibeatur regula proportionis : sicut se habet 4929 ad 3600, id est ad 60 *secunda*, multiplicata per 60 *tertia* : ita se habent 1647 ad quartum proportionalem ignotum. Factum dabit 1202 *tertia*, hæc redacta

in *secunda* efficiunt 20, 2 ; ita ut tangens anguli C sit 39. 48. 20.

2. & tantummodo duo minuta *tertia* deficient ; quod patebit ad-

denti utramque *tangentem* nempe anguli B 50. 11. 39. 56

Et *tangentem* anguli C 39. 48. 20. 2.

89. 59. 59. 38.

§. 46. **O**pe logarithmorum tangens AC = 24 anguli B hac ratione invenitur, nempe: numerorum absolutorum logarithmi in *tabula Briggsi* inveniantur ; logarithmi vero sinuum, & tangentium in tabulis *Vlacq* tum applicetur positio *regula proportionis*, nisi quod loco multiplicationis, & divisionis fiat additio, & subtractio (§. 31.)

AB = 20 sinus tot. AC = 24. Log. Tang. B
Log. 1. 3010300 Log. 10. 0000000 :: log. 1. 3802112

10. 0000000 *Additio.*

11. 3802112

1. 3010300 *Subtractio.*

10. 0791812

Atque hic logarithmus 10. 0791812 est tangentis anguli B.

§. 47.

§. 47. **Q**uoniam autem hic logarithmus in tabulis expressus non reperitur, ideo proxime minor assumitur nempe 10.07901024 qui est $50. 11.$

§. 48. **Q**uod si præter minuta scire desideres *secunda*, & *tertia*, assume logarithmum tangentis proxime majoris nempe $50. 12. = 10.0792671$; ab hoc subtrahe logarithmum tangentis proxime minoris $50. 11. = 10.0790102$; remanebit differentia 2569 . Porro hunc logarithmum minorem $50. 11. = 10.0790102$ subtrahe etiam ab invento mox logarithmo. 10.0791812 , remanebit differentia 1710 ; tandem fiat regula trium: sicut se habet 2569 ad 3600 nempe $60'' \times 60'''$, ita se habent 1710 ad quartum proportionalem quæsitum. Facta operatione habebuntur $2396'''$; hæc redigantur in *secunda*, & erunt $39. 56''$; ita ut *tangens* A C anguli B, quemadmodum etiam per sinus ostensum est (§. 44.) sit $50. 11. 39. 56''$.

PROBLEMA II.

Tab. I. §. 49. **D**atis duobus lateribus $DH = 30$ pedes, & $DE = 20$ ped. cum angulo recto D invenire hypotenusam EH.
Fig. 16.

Inventis primùm angulis acutis $H = 25$, & $E = 65$ (§. 42.) assumatur regula proportionis dicendo; sicut se habet angulus $H = 25$ ad latus oppositum $DE = 20$; ita se habet sinus totus HD ad hypotenusam HE .

DE ANALYSI TRIANGULORUM RECTANGULORUM. 313

| | | |
|---------------|----------|--------------|
| Sinus ang. 25 | Latus DE | Sinus totus. |
| 42261.83 | 20 | 100000.00 |

Neglecta fractione provenit hypotenusæ HE = 47 ped.

§. 50. **A**lio modo inveniri hypotenusæ HE potest, nempe per *secantem*, dicendo: sicut se habet sinus totus D

E ad 20, ita se habet secans anguli E = 65 ad hypotenusam EH.

| | |
|------------|------------------------|
| Sinus tot. | secans anguli DEH = 65 |
| 100000.00 | 20 — — 236620.16 |

Factaque operatione prodibit pariter hypotenusæ HE = 47.

§. 51. **A**lio modo per logarithmos sinuum hoc paratur, dicendo: sicut se habet logarithmus sinus anguli

25 ad logarithmum numeri 20: ita se habet logarithmus sinus totius ad logarithmum hypotenusæ.

| | | |
|-----------------|----------------|-------------------------|
| Log. anguli 25. | Log. Numeri 20 | Log. sinus totius. |
| 9.6259483 | 1.3010300 | 10.0000000 |
| | | .1.3010300 <i>Add.</i> |
| | | <hr/> |
| | | 11.3010300 |
| | | 9.6259483 <i>Subtr.</i> |
| | | <hr/> |
| | | 1.6750817 |

In tabula autem *Brigii* logarithmus 1.6750817 est proxime æqualis numero absoluto 47, qui hypotenusam HE notat.

§. 52. **P**er logarithmum *secantis* si problema solvere quis cupiat; oportebit logarithmum *secantis* primo invenire; cum hic in tabulis non contineatur. Itaque hac via

logarithmum *secantis* anguli E 65 reperire licet. Inveniatur

primo complementum anguli E 65, quod complementum cum
Rr
fit

fit 25, habebit logarithmum 9.6259483. Tum logarithmus sinus totius duplicetur ut fit 20.0000000; ab hoc duplicato si-
nu toto subtrahatur logarithmus complementi 9.6250483, &
remanebit 10.3740517. hic erit logarithmus secantis anguli E

65. Jam dicatur: sicut se habet logarithmus sinus totius DE
ad logarithmum numeri 20: ita se habet logarithmus secantis
anguli E ad logarithmum hypotenusæ EH.

| | | |
|-------------------|-----------------|---|
| Logar. sinus tot. | Log. Numeri 20. | Log. secantis anguli, E |
| 10.0000000 | 1.3010300 | 10.3740517. |
| | | I. 3010300 <i>Add.</i> |
| | | <hr style="width: 50%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> |
| | | -II. 6750817 |
| | | IO. 0000000 <i>Subtr.</i> |
| | | <hr style="width: 50%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> |
| | | -I. 6750817 |

Qui logarithmus 1.6750817 in Tabula Brigii proxime respon-
det numero absoluto 47, notatque hypotenusam EH.

§. 53. **Q**uoniam tamen ille logarithmus paulo est major nu-
mero 47 pedum; si forte collubitum cui sit etiam
in digitos inquirere, accipito eundem logarithmum sub cha-
racteristica 2. nempe 2.6750817, hinc correspondentem pro-
xime minorem numerum absolutum deprehendes 473, quod
significabit, illis 47 pedibus 3 digitos adjici debere; Cum au-
tem logarithmus ille adhucdum paulo major sit, si rescire etiam
lineas illius hypotenusæ sit animus, quærat idem logarith-
mus sub characteristica 3, nempe 3.6750817, atque huic lo-
garithmo reperietur numerus absolutus proxime consonans
4732, quod argumento erit, hypotenusam illam EH præter
47 pedes, 3 digitos etiam 2 lineas continere. Atque hac me-
thodo in univèrsam operari licebit, quotiescunquè minor
quantitatis mensura fuerit investiganda.

P O B L E M A III.

Tab. 1. §. 54. **D**ata hypotenusæ MO = 1000, uniusque lateris NO = 291. comp.
Fig. 17. angula recto N, reliquos aculos M, & O invenire. Et

DE ANALYSI TRIANGULORUM RECTANGULORUM. 315

Et primo quidem per sinus dicendo: ut hypotenusa O $M. = 1000$ ad sinum totum; ita latus $ON = 891$ ad angulum oppositum M .

| | | |
|------|------------|------|
| OM | Sinus tot. | ON |
| 1000 | 100000.00 | 891 |

Productum erit 891000, quod in tabulis proxime æquale est sinui 63° . Quod si quis etiam minuta secunda, & tertia nosse cupit, ille modo (§. 44.) insinuato utetur. Reperto autem angulo acuto $M = 63^\circ$ facile devenietur in Notitiam anguli O ; subtractis quippe 63° a 90° remanebunt 27° anguli O (§. 14.)

§. 55. Beneficio logarithmorum sic operaberis :

| | | |
|--------------------|----------------|------------|
| Logar. numeri 1000 | Log. sin. tot. | Logar. 891 |
| 3.000000 | 10.000000 | 2.9498777 |

Facta operatione habebitur quartus proportionalis, nempe logarithmus 9.9498777, qui proxime æqualis est logarithmo in tabulis expresso 9.9498809 id est 63° .

PROBLEMA IV.

§. 56. *Data hypotenusa MO , unoque latere NO cum angulo recto N Fig. ead. tertium latus MN invenire.*

Ante problematis resolutionem hujus, inveniendus est acutus angulus O 27° (§. 42.) tum vero fiat regula trium: sicut se habet sinus totus 100000.00 ad oppositam hypotenusam M $O = 1000$: ita se habet sinus anguli $O = 27^\circ$ id est 45424.97 ad latus quæsitum MN . Qua comparatione instituta prodibit latus $MN = 454$.

§. 57. **A**lia ratione hoc problema per logarithmōs expedi-
tur: Numerus hypotenusæ $MN = 1000$ additur
cum numero lateris $NO = 891$, eritque productum 1891 .
Rursus subtractione lateris $NO = 891$ ab hypotenusæ MO
 $= 1000$ quæritur differentia utriusque, quæ est 109 . Jam
amborum numerorum nempe 1891 quæritur logarithmus
 3.2766915 ; differentiæ item 109 logarithmus, nempe
 2.0374265 . Hisce logarithmis additis, erit logarithmus
 5.3141180 ; quem ubi rursus per 2 dimidiaveris, erit 2.6570590 .
Et hic erit logarithmus lateris quæsi MN , qui in tabula Bri-
gii proxime respondet numero absoluto 454 .

PROBLEMA V.

Tab. I. §. 58. **D**atis duobus angulis acutis $F = 56.12$, & $H = 33.48$ cum
Fig. 18. latere $FG = 18$ reliqua latera nempe GH , & FH invenire.

Uti se habet sinus totus ad latus $FG = 18$; ita se habet
tangens anguli $F = 56.12$, hoc est 159378.22 ad latus quæsi-
tum HG . Facta operatione juxta regulam trium prodibit nu-
merus 26 latus HG .

§. 59. **P**er logarithmos fit hoc modo:

| | | |
|-----------------|-----------|-------------------------------|
| Log. sinus tot. | Log. 18 | Log. tangentis ang. 56.12 . |
| 10.000000 | 1.2552725 | 10.1742873. |
| | | 1.2552725 <i>Add.</i> |
| | | 11.4295598 |
| | | 10.000000 <i>Subtr.</i> |
| | | 1.4295598 |

Est autem logarithmus 1.4295598 proxime æqualis nume-
ro absoluto 26 lateris GH .

Hypotenusæ reperietur per Problema II. (§. 49.)

DE ANALYSI TRIANGULORUM RECTANGULORUM. § 17

§. 60. **Q**uod si demum data hypotenusa FH; & angulis inveniendum sit crus HG, fiat propositio: sicut se habet sinus totus G, ad sin. anguli F; ita se habebit latus FH ad HG.

Sequitur Tabella Analytica Triangulorum Rectangulorum.

| Data | Quæsitæ. | Operatio. |
|-----------------------------------|---------------|---|
| Utrumque latus D, & B. | Angulus F. | D. B : : Sinus totus. tangens anguli F. |
| | Hypotenusa E. | Sinus anguli F. Sinus totus : : B. E. <i>aut</i> : Sinus totus. Secans angul. C : : B. E. |
| Anguli acuti F, & C cum latere D. | Latus B. | Sinus totus. tangens anguli F : : D. B. <i>aut</i> : tangens anguli C. sinus totus : : D. B. |
| | Hypotenusa E. | Sinus anguli C. D : : sinus totus. E. <i>aut</i> : sinus totus. Secans anguli F : : D. E. |
| Anguli acuti cum hypotenusa E. | Latus B. | Sinus totus. Sinus anguli F : : E. B. |
| Latus B cum hypotenusa E. | Angulus F. | E. B : : Sinus totus. Sinus anguli F. |
| | Latus D. | Sinus totus. Sinus anguli C : : E. D. |

Tab. I.
Fig. 19.

C A P U T V.

De Analyfi Triangulorum obliquangulorum.

PROBLEMA I.

§. 61. **D**ati tribus lateribus obliquanguli ABC, segmenta AO, & OC, ipsamque perpendicularem BO, reperire. Tab. I.
Fig. 20.

Rr 3

Ex

Ex centro B, radio minoris lateris AB describatur circulus, qui latus BC, & AC secet in punctis M, & N. Ex B continuetur recta in D; quia igitur $BD = BA$, erit $AB + BC = DC$; & MC erit differentia lateris AB, & BC. Jam dicatur: sicut se habet AC ad DC; ita se habet MC ad NC; ut NC sit quarta proportionalis; Hac itaque quarta proportionali NC ablata a recta AC, remanebit AN, in cujus medium O cadet perpendicularis BO; ita ut AO sit segmentum minus; OC vero sit segmentum majus.

Tab. I. §. 62. **A** St si pro radio circuli constituatur radius GO, sic
Fig. 21. ut centrum in G constituatur, atque ex K per G continuetur recta in S, itemque ex K per O continuetur recta in Q: latera GO, & OK erunt æqualia SK; & TK erit differentia; Jam quarta proportionalis QK reperitur dicendo: sicut se habet OK ad SK; ita se habet differentia TK ad quartam proportionalem QK. Porro OK demitur ex QK, & remanet QO. Hujus semissis dabit segmentum minus QX, & majus XK. Denique perpendicularis GX tum innotescet, cum ex quadrato GO fuerit quadratum XO subtractum, atque ex residuo extrahatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*) hæc dabit perpendicularem GX (§. 18.)

Fig. 21. §. 63. **C**Um quarta proportionalis major est illo latere, in
Fig. 20. quod perpendicularis descendit v. g. proportionalis QK, tum perpendicularis semper extra triangulum cadit; at vero cum quarta proportionalis minor est illo latere, quod perpendicularem excipit, v. g. quarta proportionalis NC, tum perpendicularis intra triangulum descendit. Universim autem rectangula AC + CN, item DC + CM *Fig. 20.* æqualia sunt; sicut, & rectangula $QK \times OK$, item $SK \times TK$ itidem æqualia sunt (§. 174. *Geometr.*)

Fig. 20. §. 64. **I**Taque ex his apparet ratio investigandi angulos cujusvis obliquanguli, cujus tria tantummodo latera cognita sint; Cognito enim sinu AO, & ON habebitur perpendicularis

latis BO; qua nota, cum eoque latere OC, & angulo recto O intercepto, habebitur uterque angulus C, & B per (§. 42.) Sic etiam cognito latere BO, & OA cum angulo recto interjacente O habebitur angulus B, & A per eundem (§. 42.) Igitur notis angulis A, & C sublatoque utrinque recto A scies quoque, quotnam graduum sit angulus obtusus B, feu ABC.

PROBLEMA II.

§. 65. *D*atus trianguli scaleni FDE duobus lateribus: nempe DE = 30, & FE = 36 cum angulo intercepto E 41. 24. 18"; angulos reliquos D, & F invenire. Tab. I.
Fig. 22.

Sicut se habet summa utriusque lateris cogniti FE + DE = 66 ad differentiam laterum FE - DE = 6, ita se habet tangens mediæ summæ angulorum ignotorum D, & F ab angulo

noto E subtractorum, nempe 138, 35, 42 ad tangentem mediæ differentiæ inter mediam summam, & quemlibet angulum ignotum, v. g. ad angulum D. Hæc differentia mediæ summæ addita mediæ summæ angulorum detegit majorem; residuus vero numerus detegit angulum minorem.

Latus FE + DE Latus FE - DE tangens mediæ summæ angul. ignotorum D, & F

$$66 \quad - 6 \quad = 69. 17. 51''$$

$$264507. 42$$

158704452 | 24046.12

Hinc producto 24046.12 proxime in tabulis respondet tangens 13. 31 nempe 24038.64. Porro ad inquisitionem accedatur secundorum (§. 44.) subtrahendo 24038.64, ab 24046.12 remanebit differentia 748. Rursus tangens 13. 31 nempe 24038.64

24038. 64. subtrahatur a tangente proxima 13. 32, id est: 24069. 41; erit differentia 3077. Denique fiat regula proportionis: 3077 . 60 . 748. factum erit 10, ut tangens mediae differentiae sit 13. 31. 10. Hæc differentia addita mediae summæ 69. 17. 51 indicat majorem, angulum $D = 82. 49. 1$; subtracta vero a media illa summæ exhibet angulum minorem $F = 55. 46. 41$.

§. 66. **L**ogarithmorum beneficio problematis hujus solvendi viam ita inibis:

| | | |
|------------|------------|----------------------------|
| Logar. 66. | Logar. 6. | Logar. tangent 69. 17. 51. |
| 1. 8195439 | 0. 7781512 | 10. 4222774. |
| | | 0. 7781512 add. |
| | | <u>2004286</u> |
| | | 8195439 subtract. |

Log. proxim. tangentis different. 13. 30. 9 . 3808847

Subtrahatur Logarith. 13. 30 = 9 . 3803537

Differentia 5310

Logarithmus tangentis 13. 31 = 9 . 3809100

Logarithmus tangentis 13. 30 = 9 . 3803537

Differentia . 5663

Jam regula proportionis instituat: 5663 . 60 . 5310. factum prodibit 56, ita ut differentia media sit 13. 30. 56. Hæc addita mediae summæ angulorum 69. 17. 51 denotat angulum

gulum $D = 82. 48. 47''$. subtracta vero a media summa angulorum denotat angulum $F = 55. 46. 41''$.

§. 67. **N**Am ducatur linea AC ad quantamlibet longitudinem, fiatque angulus CAB æqualis angulo DFE *Tab. I. Fig. 23.*

Fig. 22. (Qui si angulus obtusus foret, accipiatur ejus supplementum ad medium circulum) angulus autem BAG fiat æqualis angulo FDE (in angulis obtusis assumatur rursus supplementum ad medium circulum). Itaque angulus GAC summam continet ignotorum angulorum EFD & FDE. Media angulorum summa erit PAG, vel CAP. Denique PAB erit differentia inter summam mediam & quemvis ignotum angulum. Porro ex centro A ducatur circulus HPK, fiat item recta HK, quæ chorda sit utriusque anguli GAB & BAC. Erit itaque HM sinus anguli GAB, & KT erit sinus anguli BAC. Tangens mediæ summæ est GP vel PC, tangens demum differentiæ est PB vel PL. Igitur anguli MHN, & TKN æquales sunt, eo quod HM & KT angulos rectos efficiant; sicut & anguli MNH & TNK æquales sunt (§. 62. *Geomet.*); atque etiam anguli NKA & NHA (§. 86. *Geomet.*). Rursus cum triangula æquiangula etiam latera proportionalia habeant (§. 92. *Geomet.*) ita se habebit sinus HM ad HN, sicut se habet KT ad KN; atqui sinus anguli FDE *Fig. 22.* sic se habet ad latus FE: sicut sinus anguli DFE ad latus DE: Et quoniam sinus HM *Fig. 23.* anguli HAN æqualis angulo FDE *Fig. 22. ex hypothesi*; & KT *Fig. 23.* sinus anguli KAT æqualis angulo DFE rursus *ex hypothesi Fig. 22*; igitur latera HN & NK eandem proportionem habebunt, quam habent latera EF & ED *Fig. 22.* & chorda HK *Fig. 23.* loco summæ utriusque lateris EF & ED *Fig. 22.* esse poterit; SN vero loco differentiæ utriusque lateris; ac tandem OS vel ON loco mediæ differentiæ; denique cum ob parallelas HK, GC triangula GCA, HKA, item GPA & HOA similia sint (§. 81. *Geomet.*) debeat summa utriusque lateris HK ita se habere ad differentiam SN, sicut duplicata tangens mediæ summæ

mæ GC, ad duplicatam tangentem differentiæ LB, quæ ultra & intra mediam summam angulorum continetur. Aut cum eadem sit duplicium proportio, quæ est simplicium (§. 92. *Geomet.*); habebit se summa utriusque lateris HK ad eorum differentiam SN, sicut tangens mediæ summæ PG vel PC ad tangentem mediæ differentiæ PB, quæ ultra & intra limites mediæ angulorum summæ continetur: *Quod utique erat demonstrandum.*

PROBLEMA III.

Tab. I. Fig. 24. §. 68. *D*atis duobus lateribus $MO = 36$ & $MN = 24$. cum angulo interjacente $M = 55^{\circ}. 49'. 3''$. invenire latus NO .

Primum inveniatur angulus O per *Problema II.* (§. 65.) & deprehendetur angulus $O = 41^{\circ}. 24'. 18''$. Tum fiat proportio: sicut se habet sinus anguli $O = 41^{\circ}. 24'. 18''$ ad latus $MN = 24$; ita se habebit sinus anguli $M = 55^{\circ}. 49'. 3''$ ad latus NO .

Quoniam autem in *Tabulis sinuum secunda* expressa non habentur; igitur finum $41^{\circ}. 24'. 18''$ hac investigabis ratione:

Quære primo finum $41^{\circ}. 24'$ nempe 66131. 18; hunc subtrahe à sinu proxime majori $41^{\circ}. 25'$, & deprehendes differentiam 2182. Tum fiat regula *trium*: 60 secunda dant 2182; quid dabunt 18? & habebis productum 654; quæ si addideris sinui $41^{\circ}. 24'$ nempe 66131. 18, prodibit finus 66137. 72. id est: $41^{\circ}. 24'. 18''$.

§. 69. **S**ic prorsus deprehendetur sinus $55^{\circ} 49' 3''$. nimirum sinus $55^{\circ} 49'$, id est: 82724. 40. Subtrahatur a sinu proxime majori nempe $55^{\circ} 50'$, id est 82740. 74, & habebitur differentia 1634. jam dicatur: 60 secunda dant 1634; quid dabunt 3 secunda? productum erit 81. Hæc addantur sinui $55^{\circ} 49'$, id est: 82724. 40, eritque sinus $55^{\circ} 49' 3''$ hujusce magnitudinis: 82725. 21.

Sin. $41^{\circ} 24' 18''$. Latus MN . Sinus $55^{\circ} 49' 3''$
 66137. 72 24 82725. 21.
 Facta operatio exhibebit latus NO = 30.

§. 70. **P**ER Logarithmos hocce problema solvere cupienti necessum est Logarithmos sinuum $41^{\circ} 24' 18''$ & $55^{\circ} 49' 3''$ reperire, qui etiam *secunda* annexa expriment; quia vero in tabulis ejuscemodi logarithmi non existunt inferti, licebit eos hac plane methodo reperire: Logarithmus $41^{\circ} 24'$, id est: 9. 8204063 subtrahatur a logarithmo sinus proxime majoris $41^{\circ} 25'$, nempe 9. 8205496, & innotescet differentia 1433. Tum operare: 60 *secunda* dant 1433; quid dabunt 18? prodibitque factum 429. Hoc ubi additum fuerit logarithmo $41^{\circ} 24'$, nempe 9. 8204063, innotescet proprius logarithmus $41^{\circ} 24' 18''$, id est: 9. 8204492. Sic etiam reperiatur logarithmus sinus $55^{\circ} 49' 3''$. nempe logarithmus sinus $55^{\circ} 49'$ id est: 9. 9176336 subtrahatur a logarithmo sinus proxime majoris $55^{\circ} 50'$, id est: 9. 9177194 deprehendeturque differentia

S s 2

858.

858. Jam dicatur: 60 *secunda* dant 858; quid dabunt 3? & habebitur factum 42; quæ 42 si addita fuerint logarithmo finus 55. 49, id est: 9. 9176336, prodibit proprius logarithmus finus 55. 49. 3 nimirum 9. 9176378. Jam fit proportio:

| | | |
|--------------------------|------------|-------------------------|
| Logar. finus 41. 24. 18. | Logar. 24. | Logar. finus 55. 49. 3. |
| 9. 8204492 | 1. 3802112 | 9. 9176378 |
| | | 1. 3802112 add. |
| | | |
| | | 11. 2978490 |
| | | 9. 8204492 subtr. |
| | | |
| | | 1. 4773998 |

Qui Logarithmus 1. 4773998 in tabula *Brigii* proxime respondet numero absoluto 30, ita ut latus NO sit æquale 30.

PROBLEMA IV.

Tab. I. §. 71. Dato trianguli ABC uno latere AC = 60, & duobus angulorum finibus A = 56, & B = 84 invenire finem anguli C.

Angulus uterque A = 56 & B = 84 addantur, erunt 140. hæc summa subtrahatur a gradibus medii circuli 180, remanebunt 40 finus anguli C, eritque angulus C 40 graduum; tres quippe anguli interni A, B, C æquivalent duobus rectis, seu gradibus 180, (§. 77. *Geomet.*)

PROBLEMA V.

Tab. I. §. 72. Datis trianguli CKD duobus lateribus CK & KD cum angulo obtuso CKD interjacente, invenire latus CD & angulos KCD, KDC.

Latus

Latus CK continuetur in M; & quoniam angulus CKD notus esse supponitur, notus etiam erit angulus supplementi DKM. Ex D descendat perpendicularis in M, quæ angulum rectum DMK constituat; itaque quia latus KD notum esse supponitur, & quia etiam angulus complementi DKM cum angulo recto DMK noti sunt: innotescet pariter angulus tertius KDM cum aliis duobus lateribus KM & DM (§. 54.)

Jam vero latus KM addatur lateri CK, ut fiat CM, latus DM pariter innotuisse supponitur: igitur cognitio hiæ duobus lateribus CM & DM cum angulo recto M interjacente devenietur etiam in cognitionem hypothenusæ CD. (§. 49.)

§. 73. Porro cognitio tribus lateribus CK, KD, DC cum angulo obtuso K, quia sinus obtusorum angulorum, id est: ultra 90 gradus procedentium non habentur in tabulis; igitur loco sinus hujus anguli obtusi CKD accipiatur sinus complementi, nempe anguli DKM, fiatque regula proportionis: sic se habet cognitum latus CD ad sinum complementi anguli obtusi K, uti se habet cognitum latus KD ad sinum oppositi anguli C; atque operatione peracta cognoscetur angulus sinus oppositi C. Denique sicut se habet latus CD ad sinum complementi anguli obtusi K; ita se habet cognitum latus CK ad sinum oppositi anguli D. Hacque ratione etiam tertii anguli sinus innotescet.

PROBLEMA VI.

§. 74. Cognitis trianguli obtusanguli ABC duobus lateribus AC = 18, & BC = 12, cum angulo obtuso 120, iis lateribus non comprehenso, invenire sinum anguli oppositi A, & tertium latus AB.

Tab. I.
Fig. 27.

Latus AB continuetur in F, & quoniam sinus anguli

ABC est 120, erit complementi angulus CBF = 60 graduum. (§. 234. *Geomet.*) Jam fiat regula proportionis: sicut se habet latus AC = 18 ad sinum supplementi 60 graduum; ita se habet latus BC = 12 ad sinum anguli A. Productum itaque

exhibebit sinum anguli A. Porro sinus anguli B = 120 cum sinu invento anguli A addatur, factumque ab 180 subtrahatur, residuum dabit sinum tertium anguli C. Inventis denique tribus angulis, facile latus AB innotescet,

Sin. ang. supplem. CBF. Latus opp. = 18 :: sinus anguli C. Latus AB.

Tab. I.

Fig. 28.

§. 75. **P**RO coronide doctrinæ de angulis obtusis illud accipias velim, nempe: *trianguli obtusanguli* CKA *sinum supplementi* CKB *haberi etiam posse pro sinu anguli obtusi* AKC.

Ex C demittatur perpendicularis in B, atque eadem cum circini apertura ex punctis A & K describantur arcus GI & DE, ut AG = KD. Rursum ex G & D demittantur perpendicularæ GH & DF, quæ sint sinus anguli A & anguli supplementi CKB. Erunt itaque triangula ACB & AGH similia; propterea, quod unum angulum nempe A communem habeant; alter vero angulus B & H fit rektus (§. 86. & 87. *Geomet.*) triangula quoque CKB, & DKF ob eandem rationem similia erunt.

Itaque si $DF \times KC = AC \times GH$, tunc $DF. AC :: GH. KC$. si vero $DF. AC :: GH. KC$, tunc etiam DF erit sinus anguli obtusi AKC. atqui $DF \times KC = AC \times GH$; nam triangula CKB & DKF; itemque ACB & AGH sunt similia: Igitur $CB. DF :: KC. KD$. Igitur etiam $DF \times KC = CB \times KD$. Præterea $CB. AC :: GH. AG = KD$; igitur & $AC \times GH = CB \times KD$. Denique cum duæ magni-

magnitudines æquales uni tertiæ sint etiam æquales inter se, erit $DF \times KC = AC \times GH$. Q. E. D.

C A P U T VI.

Problemata Planimetriam, Altimetriam, Bathymetriam spectantia, Trigonometriæ subsidio resolvuntur; & mappæ geographicæ tam universales, quam particulares adornantur.

P R O B L E M A I.

§. 76. *PR*ofunditatem vacui putei AB mensurare. Tab. I.
Fig. 29.
Mensuretur primum diameter AC, sitque v. g. 8 pedum, tum ope Astrolabii (§. 110. Geomet.) inveniatur angulus ACB = 84. 59; erit itaque angulus ABC = 5. 1 (§. 77 Geomet.) & angulus BAC erit rectus; Fiat igitur positio: sicut

se habet sinus anguli B 5. 1 ad latus AC = 8: ita se habet sinus anguli C 84. 59. ad latus quæsitum AB.

| | | |
|-----------------|----------|----------------------|
| Sin. ang. 5. 1. | Latus AC | Sinus anguli 84. 59. |
| 8744. 55 | 8 pedum. | 99616. 93. |

Facta operatione per regulam *trium* (§. 79. Arithm.) prodibit 91; ita ut latus AB, seu profunditas putei sit 91 pedum.

§. 77. *PER* Logarithmos fit hac ratione:

| | | |
|-----------------|--------------|---|
| Log. sin. 5. 1. | Log. 8. ped. | Log. ang. 84. 59. |
| 8. 9417376 | 0. 9030900 | 9. 9983332 |
| | | 0. 9030900 add. |
| | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> |
| | | 10. 9014232 |
| | | 8. 9417376. subtr. |
| | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> |
| | | 1. 9596856 |

Hic

Hic logarithmus 1. 9596856 in Tabula *Brigii* proxime æqualis est numero absoluto 91 ; quod notat latus AB 91 pedes completi.

PROBLEMA II.

Tab. I. §. 78. Sit gaza nautica FGMN, supra cujus tectum in puncto B superemineat incumbens veclis navalis BD ; ita ut neque reliqua veclis pari CB ob gazam obstantem videri, neque etiam perpendicularis BA adiri possit, propterea quod punctum B summitas tecti sit, utrinque inter muros consurgentis. Invenienda itaque sit primum altitudo gaze BA ; tum distantia horizontalis AX ; item magnitudo veclis supereminentis BD ; altitudo DS ; nec non magnitudo veclis invisibilis CB ; ac tandem distantia a linea perpendiculari CA.

Primum itaque astrolabii ope (§. 110 *Geomet.*) in puncto X consistens geometra exploret angulum $AXB = 44^\circ$; itemque angulum $AXD = 63^\circ 30'$. Rursus astrolabio in Z posito, & quidem ut linea recta sit AXZ, mensuretur distantia XZ = 21 ped. atque in eodem puncto Z capiatur angulus $AZD = 44^\circ 30'$; itemque angulus $AZB = 29^\circ$, & angulus etiam SZD , itidem $44^\circ 30'$.

Jam inquiretur in perpendicularem inaccessibilem BA ; & quidem tam angulus $AZB = 29^\circ$, quam angulus $AXB = 44^\circ$ subtrahatur a sinu toto, id est, a 90 gradibus ; ex priore restabuut 61 gradus pro angulo ABZ ; ex posteriori vero 46 gradus pro angulo ABX (§. 14). Utriusque anguli 61, & 46 assumantur tangentes, noteturque differentia tangentium.

$$\begin{array}{r} \text{Sinus } 61^{\circ} \text{ tangens} \quad 180404.78 \\ \text{Sinus } 46^{\circ} \text{ tangens} \quad \underline{103553.03} \\ \hline \quad \quad \quad 76851.75 \text{ differentia.} \end{array}$$

Huic tangentium differentiae in tabulis respondent $37^{\circ} 32'$. quorum logarithmus est 9. 8855035 ; itaque instituitur regula proportionis (§. 42) : sicut se habet differentia tangentium $37^{\circ} 32'$ ad latus $XZ = 21$ pedum ; ita se habet sinus totus $= 90$ ad latus, seu altitudinem AB . Fiat per logarithmos

$$\begin{array}{r} \text{logar. differentiae } 37^{\circ} 32'. \text{ logar. } XZ = 21 \text{ ped. logar. sinus tot.} \\ 9. 8855035 \quad . \quad \quad \quad \text{I. 3222193} \\ \quad \quad \quad . \quad \quad \quad \text{10. 0000000 add. 10. 0000000} \\ \quad \quad \quad . \quad \quad \quad \text{II. 3222193} \\ \quad \quad \quad . \quad \quad \quad \underline{9. 8855035 \text{ fubtr.}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{I. 4367158} \end{array}$$

Qui logarithmus 1. 4367158 in tabula *Brigii* respondet proxime numero absoluto 27 ped. 3. digit. 3. lin. (§. 53). ita ut latus, seu altitudo perpendicularis AB sit 27 ped. 3 digit. 3 lin.

§. 79. **P**orro inveniatur latus, seu altitudo DS : angulus nempe $44^{\circ} 30'$ subtrahitur ab angulo recto 90 graduum ; remanebunt $45^{\circ} 30'$ pro angulo SDZ (§. 14). Sic pariter angulus $SXD = 63^{\circ} 30'$ subtrahatur a 90 gradibus, & remanebit angulus $SDX = 26^{\circ} 30'$.

Sinus anguli $45^{\circ} 30'$ tangens 101760. 74

Sinus anguli $26^{\circ} 30'$ tangens 49858. 16

51902. 58 differentia

Et hæc differentia tangentium 51902. 58 correspondet in tabulis $27^{\circ} 25'$, seu logarithmo tangents 9. 7149329.

§. 80. **N**unc inquiratur latus, seu altitudo DS per regulam proportionis (§. 42) : sicut se habet tangentium differentia $27^{\circ} 25'$, ad latus XZ = 21 pedum ; ita se habet sinus totus 90 graduum ad latus DS. Et quidem faciliiori modo per logarithmos.

| | | |
|--|-----------------------------|-----------------|
| log. tang. different. $27^{\circ} 25'$. | log. XZ = 21. | log. sinus tot. |
| 9. 7149329 | 1. 3222193 | 10. 0000000 |
| | <u>10. 0000000</u> add. | |
| | 11. 3222193 | |
| | <u>9. 7149329</u> subtract. | |
| | 1. 6072864 | |

Qui logarithmus 1. 6072864 in tabula Brigii prope respondet numero absoluto 40 ped. 4 digit. 6 lin. (§. 47) eritque latus DS = 40 ped. 4. digit. 6 lin.

§. 81. **N**unc procedatur ad inquisitionem baseos seu lateris SZ per regulam proportionis, dicendo : sic se habet sinus anguli SZD $44^{\circ} 30'$ ad latus DS = 40 ped. 4 digit. 6 lin. sicut se habet sinus anguli SDZ = $45^{\circ} 30'$ ad latus SZ. Fiat per logarithmos

log.

$$\begin{array}{r} \text{log. sin. } 44. 30' \text{ } \overset{\circ}{\text{log. DS}} = 40 \text{ ped. } 4 \text{ digit. } 6 \text{ lin. log. sin. } 45. 30' \\ \underline{9. 8456618} \qquad \qquad \qquad \underline{1. 6072864} \qquad \qquad \qquad \underline{9. 8532421} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{addit.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\text{II. } 4605285} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{9. 8456618} \text{ subtract.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{I. } 6148667 \end{array}$$

Qui logarithmus I. 6148667 in tabula Brigii respondet numero absoluto 41 ped. 2. digit. 9. linearum ; Erit itaque basis, seu latus SZ = 41 ped. 2 digit. 9 lin.

§. 82. **R**ursum inquiratur distantia inaccessibleis AX, & quidem per talem positionem : sicut se habet tangens anguli AXB = 44 ad latus AB = 27 ped. 3. dig. 3. lin. ita se habet tangens anguli ABX = 46 ad latus AX. Fiat per logarithmos.

$$\begin{array}{r} \text{logarith. tang. } 44 \text{ } \overset{\circ}{\text{log. } 27 \text{ ped. } 3 \text{ dig. } 3 \text{ lin.}} \text{ } \overset{\circ}{\text{logarith. tang. } 46} \\ \underline{9. 9848372} \qquad \qquad \qquad \underline{1. 4367158} \qquad \qquad \qquad \underline{10. 0151628} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{addit.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\text{II. } 4518786} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{9. 9848372} \text{ subtract.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{I. } 4670414 \end{array}$$

Qui logarithmus in tabula Brigii notat latus AX = 29 ped. 3. digit. 1 lin.

§. 83. **P**ergatur ad inquisitionem baseos seu lateris AZ, formando hanc positionem : sicut se habet sinus anguli AZB = 29 ad latus AB = 27 ped. 3 dig. 3. lin. ita se habet sinus anguli ABZ = 61 ad latus quæsitum AZ. Per logarithmos

| | | |
|----------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| logarith. sinus 29. ^o | log. 27 ped. 3 dig. 3 lin. | logarith. 61. ^o |
| 9. 6855712 | I. 4367158 | 9. 9418193. |
| | 9. 9418193 addit. | |
| | II. 3785351 | |
| | 9. 6855712 subtraft. | |
| | I. 6929639 | |

Logarithmus hic I. 6929639 notat latus AZ = 49 ped. 3. dig. I. lin.

Ab hoc latere AZ = 49 ped. 3 dig. I lin.

Subtrahatur latus SZ = 41. 2. 9.

| | | | |
|--------------------------------|-----|----|--------------------|
| remanebunt | 8. | 0. | 2. spatium AS = BO |
| Iterum a latere DS = 40. | 4. | 6. | |
| Subtrah. latus AB seu SO = 27. | 3. | 3. | |
| remanebunt | 13. | I. | 3 latus DO |

§. 84. **C**Ognitis itaque lateribus duobus BO, & DO cum angulo recto O cognoscuntur cæteri anguli D, & B trianguli BOD (§. 42). itemque hypotenusâ, seu pars vetis prominens BD (§. 49). cui triangulo BOD simile est triangulum CSD; Cum enim utrumque habeat unum angulum rectum nempe O, & S, angulum vero D communem, habebunt & angulos B & C æquales, ipsaque triangula BOD, & CSD erunt similia (§. 86 *Geomet.*) Itaque ad explorandum latus CS fiat regula proportionis: sicut se habet latus DO = 13 ped. I. dig. 3 lin. ad latus BO = 8 ped. 0 dig. 2 lin. ita se habebit latus DS = 40 ped. 4 dig. 6 lin. ad latus ignotum CS. Fiat per logarithmos.

log. DO = 13 p. I d. 3 l. log. BO = 8 p. 0 d. 2 l. log. DS = 40 p. 4 d. 6 l.

3. 1182647

2. 9041744.

3. 6072864 addit.

3. 6072864

5. 5114608

3. 1182647 subtraft.

2. 3931961

Vel

Vel melius §. 3931961 logarithmus lateris, seu distantiae CS = 24 ped. 7 digit. 2 lin. a quo latere CS = 24 ped. 7 digit. 2 lin. ubi subtractum fuerit latus AS, seu BO = 8 ped. 0 dig. 2 lin.

| | | |
|---------|--------|--------|
| 24 ped. | 7 dig. | 2 lin. |
| 8 | 0 | 2 |
| ----- | | |

remanebunt 16 7 0 id est latus CA, seu distantia vectis C a perpendiculari inaccessibili BA. Cognitis demum lateribus CA = 16 ped. 7 digit. & AB = 27 ped. 3 digit. 3 lin. invenietur per §. 43 latus CB, seu pars vectis invisibilis.

Atque ex hoc prolixiori problemate ad alia plurima resolvenda lux affunditur, atque operandi facilitas promovetur.

PROBLEMA III.

§. 85. *M*etallorum fossores descenderunt intra montem altitudine CA = Tab. II. 23 perticis; velini jam horizontaliter fodere; *Q*uæritur ita Fig. 31. que, quanto spatio fodere oporteat, ut ex B in A perveniatur?

Primum ex C erigatur lignum CD = 2 perticis, ut nempe libere ex A in B prospicere liceat; erit AC + CD = 25 perticis. Ex summitate D inveniatur angulus ADB = 54 grad. Jam fiat regula proportionis dicendo: sicut se habet sinus totus ad latus AD = 25 perticis, ita se habet tangens anguli ADB = 54 ad latus quæsitum AB.

Logarith- sinus tot. logarith. lat. AD = 25 pert. log. tang. 54

| | | |
|------------|-------------|-----------|
| 10. 000000 | I. 3979400 | |
| | 10. 1387390 | addit. |
| | ----- | |
| | II. 5366790 | |
| | 10. 000000 | subtract. |
| | ----- | |
| | I. 5366790. | |

Hic logarithmus 1. 5366790 in Brigii tabula respondet 34 pert. 4 ped. pro latere AB.

PROBLEMA IV.

Tab. II. §. 86. *Innotescit cujuspiam nubis altitudinem metiri.*
Fig. 32.

Duo observatores in prato plano AB longius a se distantes, alter quidem ex D in punctum nubis C collimans, angulum EDC observet: alter vero ex E in idem punctum nubis C collimans, metiatur angulum DEC. Cognito itaque spatio DE, quod mensurari debet, & Cognitis angulis EDC, DEC innotescit etiam latus EC (§. 15.) Porro cognito angulo DEC innotescit quoque angulus CEF, qui est supplementum ipsius anguli DEC. (§. 60. Geometr.) Cognito demum angulo FEC, & recto angulo EFC una cum latere EC mox invento, cognoscitur etiam latus seu altitudo FC.

PROBLEMA V.

Tab. II. §. 87. *Distantiam lune a terra metiri.*
Fig. 33.

Astronomus sub æquatore positus v. g. in N advertat tempus, quo luna in suo Zenith posita, perpendicularis fuerit tum suo vertici, tum centro terræ, hocque tempus alteri cuidam astronomo v. g. Viennæ B degenti ex condicto transcribat, qui Viennensis astronomus eo ipso temporis momento juxta exigentiam sui horizontis CD observaverit angulum DBM. Jam formetur triangulum BMA compositum ex radio visuali observatoris Viennensis BM, & radio terræ BA, nempe 859 circiter milliaria, atque radio visuali observatoris in æquatore N constituti, addito terræ radio NA. Igitur quia in hoc triangulo habetur angulus BAN, seu BAM, mensuratur quippe spatio, inter Viennam, & locum illum æquatoris intercepto, quod cognitum est, facile erit etiam cognoscere latus NM; nam sicut sinus anguli AMB se habet ad latus AB nempe semidiameter terræ = 859 mill. ita sinus anguli BAM se habet ad latus MB seu distantiam lunæ ab urbe Vienna.

PRO-

PROBLEMA VI.

§. 88. *Distantiam solis a terra metiri.*

Observetur, luna A tum, cum perfecte semiple-
na est, ab astronomo in C posito; Igitur eo momento, quo
luna A a sole B semiplene illuminatur, radius solis BA, cum
radiis lunæ AC, respectu observatoris in C, angulum re-
ctum constituit. Observetur præterea angulus ACB; At-
que sic cognito utroque angulo BAC, & ACB, itemque la-
tere CA cognito *ex problemate mox præcedente*, facile innotescet
distantia solis, seu latus BC; sicut enim sinus anguli ABC ad
latus AC, ita sinus anguli recti BAC ad latus BC, quæ di-
stantia solis a terra passim ad 22374 semidiametros terrestres
protenditur.

Tab. II.
Fig. 34.

§. 89. *PLura ejusmodi problemata beneficio scalæ, &*
transportatorii soluta referuntur (§. 119. & seqq.
Geometr.) quæ etiam facile huc applicari possunt, & trigono-
metriæ legibus resolvi. Est autem Trigonometrica hæc per cal-
culos operandi ratio multo securior, multoque præstantior,
quam ea, quæ in simplici geometria fit per lineas, propterea
quod lineæ & anguli in chartis facile detorqueantur, nume-
rorum autem invariabilis sit in operando conditio; tum quod
pauvilla linearum in chartis detorsio, in vastis camporum spa-
tiis magnas aberrationes involvat. Quod autem in ipsas opera-
tiones Trigonometricas errores irrepant id non emnino attri-
buendum est infallibilibus Trigonometriæ præceptis, sed,
quod data ut plurimum vel incertæ sint, vel omnino falsæ, ut
deinde necessum sit ex uno falso alterum prognerari.

PROBLEMA VII.

§- 90. *Mappam Geographicam delineare.*

Mappa *Generalis* complectitur cujusdam territorii,
aut Provinciæ figuram, in charta delineatam, cum viis tan-
tummodo; & locis quibusdam præcipuis, cum mappa *particu-*
laris

loris minora quæque illius territorii distincte exhibeat, veluti: Viarum ductum, magnitudinem, & figuram Civitatum, arcium, pagorum, fluminum, pontium, silvarum &c.

Tab. II. §. 91. **V**elit itaque geometra quispiam mappam *generalem* adoriri, constitutus in insula quadam; deligat in illa insula spatium AB tanquam basim pluribus triangulis formandis idoneam, cujus mensuram cognitam habeat ex prævia per catenam dimensione. Tum astrolabio in A collocato notet angulos CAB, DAB, EAB, itemque angulos FAB, GAB, KAB. Transferat astrolabium in punctum B, notetque rursus angulos EBA, DBA, CBA, itemque FBA, GBA, KBA; constabit sic de singulorum triangulorum duobus angulis, & uno latere; v. g. de trianguli AEB duobus angulis CAB, & EBA; itemque interjecto latere AB de trianguli AFB duobus angulis BAF, & FBA, cum noto latere AB, & sic de aliis. Igitur, & alia omnia triangulorum latera ignota, ignotique anguli innotescunt trigonometricis legibus (§. 71, & 72.)

§. 92. **P**orro quoniam latus BE, & BD innotuit trigonometrica operatione, assumatur interjacens his duobus lateribus angulus EBD, & innotescet quoque tertium latus DE (§. 68.) sic & alia cuncta exteriora latera DC, CF &c. innotescunt. Tum demum cognitis cunctis, & angulis, & lateribus, latera quidem scalæ geometricæ beneficio (§. 47. *Geometr.*) anguli autem ope transportatorii (§. 108. *Geometr.*) super charta delineentur, ut mappam exhibeant.

§. 93. **Q**uod si animus sit, generalem mappam ultra protrudere, assumatur latus aliud, jam cognitum v. g. GK pro basi, atque super ea mensurentur plurima alia triangula, quemadmodum super basi AB mox descripta fuerunt, sicque fiet, ut vastissimi territorii, & Provinciæ totius generalis idea non difficili negotio delineetur; habita tamen semper ratione lineæ horizontalis (§. 138. & seqq. *Geom.*)

§. 94.

§. 94. **M**appa *particularis* eadem fere ratione describitur, nisi quod minutiora quæque accuratius attendantur, & omnis figura camporum, fluviorum, civitatum, arcium delineetur.

§. 95. **I**chnographica Urbium, aut pagorum delineatio sic *Tab. II. Fig. 36.* instituitur: Externa latera AB, BC &c. cum longitudine linearum EA, EB &c. mensurantur, & anguli intercepti notantur; At si locus neque pertransiri, neque commode ex altero in alterum terminum prospici queat, assumantur tantummodo latera externa AB, BC, CD &c. cum angulis iuternis FAB, ABC &c. quæ tandem omnia scalæ beneficio in chartam transferri queant.

CAPUT VII.

De Trigonometria Sphærica.

§. 96. **T**rigonometria *sphærica* docet triangula sphærica resolvere; sunt autem triangula sphærica, quæ ex arcibus circulorum componuntur, atque in superficie cujusdam sphæræ descripta concipiuntur; Ideoque cum arcus ejuscemodi planis quidem delineationibus depingantur, non tamen sat comparatis ad facilem explicationem, juverit pro exactiori sphæricæ qua contemplationis, qua praxeos subsidio in armillari sphæra triangulorum sphæricorum schemata tyro-nibus exhibere.

§. 97. **A**ngulus sphæricus fit, cum quidam arcus circuli *Tab. II. Fig. 37.* maximi sphæræ supra alterius maximi circuli axem cadit; tum quippe duos angulos sphæricos rectos efficiet, aut duobus rectis æquales, quemadmodum dictum est de rectilineis (§. 60. *Geometr.*) sic arcus HD, DG efficiunt angulum sphæricum æquivalentem angulo rectilineo OD, DM; Et quemadmodum de angulis rectilineis dictum est (§. 62. *Geom.*)

Uu

pro-

productione linearum ultra angulos fieri angulos ad verticem oppositos æquales, ita hoc idem in sphaericis contingit; sic si arcus HD continuetur post D, angulus ad verticem oppositus erit æqualis angulo FDH. Porro mensura angulorum sphaericorum est arcus magni circuli, qui a concursu aliorum duorum intercipientium angulorum abest 90 gradibus. Denique si plana laterum sibi invicem perpendicularia fuerint, efficietur angulus rectus, ut fere dictum est de rectis lineis (§. 54. Geometr.)

§. 98. **S**I latus trianguli sphaerici fuerit *quadrans*, erit angulus, hinc lateri oppositus, *rectus*; si duo latera quadrantes fuerint, anguli duo oppositi erunt *recti*; tertium vero latus minus erit mensura minoris anguli oppositi. Sic cum latera seu arcus DS, DC sint quadrantes, anguli DSC, DCS erunt *recti*, itemque anguli CAS, CAD erunt *recti*, recta DA erit perpendicularis toti plano SAC, atque etiam plana arcuum DS, DC erunt perpendicularia plano arcus SC.

PROPOSITIO I.

Tab. II. §. 99. **G**Radus anguli invenire, inter lineas, alteram quidem rectam AC, alteram curvam concavam BC intercepti.

Arcus BC quærat centrum D (§. 231. Geometr.) Ex hoc centro D demittatur recta in C: Ipsi DC ducatur perpendicularis CX (§. 27. Geometr.) Tum beneficio *transportatoris* quærat angulus ACX, qui erit angulus proxime æqualis angulo ACB.

Tab. II. §. 100. **C**onsimili ratione deprehenditur angulus inter alteram rectam ON, alteram curvam convexam MN interceptus. Arcus MN inveniatur centrum X; Ex hoc centro ducatur recta in XN; In hujus rectæ puncto N erigatur perpendiculis ZN (§. 24. Geometr.) mensureturque per *transportatorem* angulus ONZ. hic dabit proxime gradus trianguli ONM.

PRO-

PROPOSITIO II.

§. 101. *M*Etiri angulum duarum curvarum concavarum AB; & CB *Tab. II.*
concurrentium. *Fig. 40.*

Utriusque arcus AB, & CB inveniatur centrum E, & D (§. 264. *Geometr.*) Ex utroque centro ducatur recta in punctum concurrentiæ B nempe DB, & EB. Super utramque rectam DB, & EB ex centro B erigatur perpendicularis, nempe BG, & BF; mensuretur angulus rectorum FBG, qui erit proxime æqualis angulo curvarum ABC.

§. 102. *A*ngulus curvarum convexarum ABC eodem pro- *Tab. II.*
lis modo deprehenditur, eritque proxime æqua- *Fig. 41.*
lis angulo MBN.

Quod si duæ diversæ curvæ lineæ altera nempe concava *Tab. II.*
CB, altera convexa AB, concurrant, inveniatur consimili *Fig. 42.*
methodo earum angulus, angulo invento GEF proxime
æqualis.

PROPOSITIO III.

§. 103. *T*Rianguli spherici HEF quod libet latus est minus semicirculo. *Tab. II.*
Invento centro arcus HE, & HF producantur *Fig. 43.*
trianguli spherici HEF latera HE, & HF, donec in G con-
currant, erit arcus HFG semicirculus, qui major est, quam
arcus HF.

SCHOLIUM.

§. 104. *M*aximi circuli transeuntes per polum alterius cir-
culi rectos faciunt cum ipso angulos; & vicissim
si circuli maximi rectos angulos faciunt cum altero circulo,
transibunt per polum illius; Maximus quippe circulus a polo
suo distat intervallo quadrantis.

COROLLARIUM I.

§. 105. **C**Um inter duo quælibet puncta, in superficie sphæ-
ræ constituta, arcus maximi circuli sit via brevissi-
ma; hinc quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora;
Fig. ead. & $GE + GF$ major quam EF .

COROLLARIUM II.

§. 106. **C**Um duo trianguli sphærici latera nempe $GE + G$
 F majora sint, quam EF per mox præcedens *Co-*
rollarium I. erunt omnia trianguli sphærici HEF latera mino-
ra, quam circulus; addendo quippe $EH + HF$, erit GEH
 $+ GFH$ circulus, qui sit major, quam tria illa latera $EH +$
 $EF + FH$.

PROPOSITIO IV.

Tab. II. Fig. 44. §. 107. **S**I ex trianguli ABC angulis maximi circuli ducantur, consti-
tuent laterum poli KDH aliud triangulum, quod erit sup-
plementum trianguli ABC .

Maximus circulus poli A sit $DEFH$, poli B sit circulus
maximus $GHLK$, denique poli C sit maximus circulus DN
 MK . igitur AH erit = quadranti, & BH pariter erit qua-
drans (§. 104.) H vero erit polus circuli AB . Porro cum C
sit polus circuli $DNMK$, & B sit polus circuli $GHLK$,
erunt CK , & BK quadrantes, & circuli BC erit polus K . Ip-
sius quoque circuli AC erit polus D , cum pariter CD , &
 AD sint quadrantes.

Jam quia KN = quadranti, & DM pariter = quadranti
(§. 104.) erit $KN + DM$, seu potius $DK + NM$ = semicir-
culo, seu quadrantibus duobus. Adeoque mensuræ anguli
 BCA , seu arcus NM erit DK supplementum ad semicirculum.
Sic etiam, quia $HE = DF$ = quadranti, erunt $HE = DF$
seu $DH + FE$ = semicirculo seu duobus quadrantibus; &
arcus

arcus FE, qui est mensura anguli BAC supplementum erit DH. Denique quia $GK = HL = \text{quadranti}$, erunt $GK + HL$, seu potius $GL + HK = \text{duobus quadrantibus}$, & HK erit supplementum arcus GL, tanquam mensuræ anguli ABC ad semicirculum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

§. 108. **Q**uoniam triangulorum supplementa sunt æquilatera; igitur etiam erunt æquiangula; & ipsa pariter triangula æquiangula erunt etiam æquilatera.

PROPOSITIO V.

§. 109. **T**res anguli triangulorum sphericorum sunt duobus rectis majoribus; *Fig. ead.* minores tamen sex rectis.

Etenim tres angulorum A, B, C mensuræ una cum lateribus trianguli DHK tres semicirculos constituunt (§. 107); Atqui tria latera trianguli DHK sunt minora quam circulus seu duo semicirculi (§. 106.): Igitur tres mensuræ angulorum A, B, C sunt majores semicirculo, & anguli ipsi A, B, C duobus rectis majores erunt. Porro cum in quolibet triangulo anguli externi una cum internis angulis sex rectos constituent; erunt interni anguli soli sex rectis minores.

§. 110. **T**abula Analytica Triangulorum Sphæricorum Rectangulorum.

| | Data præter rect. | Quæsitæ | Operatio. |
|---|----------------------|---------|--|
| I | Latus AC & angul. C. | Ang. B | Sicut radius s. sinus totus ad Cofinum CA; ita sin. C ad Cof. B ejusd. speciei cum CA. R. cof. CA :: sin. C. cof. B. |

| | Data præter rect. | Quæſita | Operatio. |
|----|------------------------|-------------|--|
| 2 | Lat. AC ang. B. | Ang. C. | Cof. CA. R. :: cof. B. ſin. C. |
| 3 | Anguli B & C | Lat. AC | Sin. C. cof. B :: R. cof. CA. |
| 4 | Latera BA & CA | Lat. BC | R. cof. BA :: cof. AC. cof. BC. |
| 5 | Latera BA & BC | Lat. AC | Cof. BA. R. :: cof. BC. cof. CA. |
| 6 | Latera BA & CA | Ang. B | Sin. BA. R. :: tang. CA. tang. ang. A BC. |
| 7 | Lat. BA ang. B. | Latus AC | R. ſin. BA :: tang. ang. B. tang. AC. |
| 8 | Latus AC ang. B. | Lat. BA. | Tang. B. R. :: tang. CA. ſin. BA. |
| 9 | Lat. BC ang. C | Lat. AC | R. cof. C :: tang. BC. tang. CA. |
| 10 | Lat. AC ang. C | Lat. BC | Cof. C. R. :: tang. AC. tang. BC. |
| 11 | Lat. BC, & AG | Ang. C | Tang. BC. R. :: Tang. CA cof. ang. C. |

Data

| | Data præter rect. | Quæſita | Operatio. |
|----|----------------------------|----------|-----------------------------------|
| 12 | Latus BC & angul. B. | Latus AC | R. fin. BC :: sin. B. sin. AC. |
| 13 | Latus A C angul. B | Latus BC | Sin. B. sin. AC :: R. fin. BC. |
| 14 | Latera B C & AC | Ang. B | Sin. CC. R :: sin. AC. sin. B. |
| 15 | Ang. B & C | Lat. BC | Tang. C. R :: cotang. B. cof. BC. |
| 16 | Lat. BC ang. C | Ang. B | R. cof. BC :: tang. C. cotang. B. |

Atque ad hos ſexdecim caſus omnes triangulorum ſphæ-
ricorum reſtangularum propoſitiones revocantur.

PROPOSITIO VI.

§. III. *D*ato latere AC = 60, 49, & angulo C = 24, 40 cum an- Tab. II.
gulo recto A, invenire angulum B, ipſi lateri AC oppoſitum. Fig. 45.

R. ſeu fin. tot. Cof. CA, :: fin. C. Cofin. B

$\begin{array}{r} \circ \\ 90 \end{array}$ $\begin{array}{r} \circ \\ 60.49 \end{array}$ $\begin{array}{r} \circ \\ 24.40 \end{array}$

Log. 10.000000 Log. 9.6880688 Log. 9.6204884

9.6880688 *Addit.*

19.3085572

10.0000000 *Subtr.*

9.3085572 Hic

Hic vero logarithmus 9. 3085572 in Tabulis Vlacquianis proxime æqualis est $11. 44'$. Ideoque cum Cofinus anguli B fit $11. 44'$; erit ipse angulus B $78. 16'$. nam $11. 44' + 78. 16' = 90.$

PROPOSITIO VII.

§. II2. *D*atis duobus angulis B = $78. 16'$, & C = $24. 40'$ invenire latus AC.

| | | | | |
|------------------|-----------------|-----|--------------------------|---------|
| Sin. C. | Cof. B | : : | Rad. | Cof. AC |
| $24. 40'$ | $78. 16'$ | | $90'$ | |
| Log. 9. 6204884. | Log. 9. 3085572 | | Log. 10. 0000000. | |
| | | | 9. 3085572 <i>Addit.</i> | |

| |
|--------------------------|
| 19. 3085572 |
| 9. 6204884 <i>Subtr.</i> |

9. 6880688

Logarithmus hic exprimit cofinum AC, valetque proxime $29. 11'$; ideoque ipsum latus AC erit = $60. 49'$.

PROPOSITIO VIII.

§. II3. *D*atis duobus lateribus BA = $22. 18'$, & CA = $60. 49'$ invenire angulum B oppositum lateri CA.

| | | | | |
|-----------------|------------------|-----|---------------------------|----------|
| Sin. BA. | Rad. | : : | Tang. CA. | Tang. B. |
| $22. 18'$ | $90'$ | | $60. 49'$ | |
| Log. 9. 5791616 | Log. 10. 0000000 | | Log. 10. 2529773. | |
| | | | 10. 0000000 <i>Addit.</i> | |

| |
|--------------------------|
| 20. 2529773 |
| 9. 5791616 <i>Subtr.</i> |

10. 6738157

Lo-

Logarithmus hic 10.6738157 notat tangentem anguli B, & exprimit gradus 78, minuta 2. Neque enim logarithmi communes Vlacquiani minutias quasque acuratissime designant; sed ad has deprehendendas. necessum est prolixiores logarithmos consulere.

PROPOSITIO IX.

§. 114. *D*ato latere BA = 22, 18, & angulo B = 78. 2. invenire *Fig. ead.*
 latus AC oppositum angulo B.

| | | | | | |
|----------------|----------------|---|---|---|-----------|
| Rad. | Sin. BA. | : | : | Tang. B. | Tang. AC. |
| 90° | 22. 18. | | | 78. 2. | |
| Log. 10.000000 | Log. 9.5791616 | | | Log. 10.6738167. | |
| | | | | 9.5791616 <i>Add.</i> | |
| | | | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> | |
| | | | | 20.2529783 | |
| | | | | 10.0000000 <i>Subtr.</i> | |
| | | | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> | |
| | | | | 10.2529783 | |

Hic logarithmus ipsius AC proxime æqualis esse reperitur

60. 49.

PROPOSITIO X.

§. 115. *D*atis duobus angulis B = 78. 16, & C = 24. 40 invenire
 latus BC.

| | | | | | |
|----------------|----------------|---|---|---|----------|
| Tang. C. | Rad. | : | : | Cotang. B. | Cof. BC. |
| 24. 40 | 90 | | | 11. 44. | |
| Log. 9.6620434 | Log. 10.000000 | | | Log. 9.3174299. | |
| | | | | 10.0000000 <i>Add.</i> | |
| | | | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> | |
| | | | | 19.3174299 | |
| | | | | 9.6620434 <i>Subtr.</i> | |
| | | | | <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> | |
| | | | | 9.6553865 | |

X x

Qui

Qui logarithmus 9.6553865 cosinum BC = 26. 53' proxime exprimit; Igitur latus BC = 63. 7'. Quippe 26. 53' + 63. 7' = 90.

PROPOSITIO XI.

§. 116. *D*ato latere BC = 63. 7', et angulo C = 24. 40'. invenire angulum B.

| Rad. | Cof. BC | : : | Tang. C. | Cotang. B. |
|----------------|----------------|-----|--------------------------|------------|
| 90° | 26. 53' | | 24. 40' | |
| Log. 10.000000 | Log. 9.6553865 | | Log. 9.6620434 | |
| | | | 9.6553865 <i>Addit.</i> | |
| | | | 19.3174299 | |
| | | | 10.0000000 <i>Subtr.</i> | |
| | | | 9.3174299 | |

Hic logarithmus 9.3174299 cotangentem anguli B notat, æqualem 11. 44': Igitur angulus B = 78. 16'.

§. 117. **E**T his quidem finem Mathematicis Institutionibus imponere placuit. Fluet ex his elementis rite perceptis utilitas non mediocris in omnem civilem vitam; quin imo poterunt Physices Tirones sic imbuti ad Physicam accedere securius, atque etiam ad sublimioris Matheſeos adyta, DEO conatibus adspirante, opportunius olim transire.

Finis Institutionum Mathematicarum.



IN.



I N D E X

RERUM PRÆCIPUARUM,

Quæ in Mathematicis hisce Institutionibus
continentur.

A.

| | Pag. | | Pag. |
|---------------------------------------|-------------|-------------------------------------|-----------|
| A Bacus Pythagoricus | 21 | Analysis triangulorum | |
| Abscissa | 286 | rectangulorum | 309 |
| Acus magnetica | 151 | obliquangulorum | 319 |
| Adamus | 6 | Angulus quid, & quotuplex | 133 |
| Abrahami scientia | 7 | Anguli vertex | 134 |
| Additio simplex | 26 | Angulum dividere | Ibid. |
| Composita | 49 | Anguli recti sunt æquales | 135 |
| in fractis | 56 | Angulum æqualem describere | 134 |
| Additionis proba | 27 | Anguli contigui | 135 |
| Signum | 27 | Oppositi | 136 |
| Additio decimalis | 109 | incidentiæ, & reflexionis | ibid. |
| Additionis Euthymetricæ | | externi, interni, alternæ | 137 |
| Problemata | 230 | ad Centrum | 138 & 200 |
| Additionis Stereometricæ | | ad peripheriam | ibid. |
| Problemata | 273 | inscripti, & circumscripti | 138 & 201 |
| Ægyptii sacerdotes mathem. | 7 | Angulos metiri | 153 |
| Æqualia quid? | 18 | Angulus majoris, & minoris segmenti | 199 |
| Æquatio algebraica | 63 | Apollonius Pergæus | 10 |
| Aliquanta, & aliquota pars | 21 | Archimedis inventa | 11 & 203 |
| Algebra quid? | 23 | Sepulchrum | 261 |
| Algebraici characteres | 22 | Archytas | 8 |
| Algebraici negligunt ordinem caracte- | | Arithmeticæ definitio | 17 |
| rum | 25 | Area quid? | 196 |
| Alligationis regula | 88 | Areas metiri | 176 |
| Almamam Califfa | 13 | Area circuli ad quadratum | 211 |
| Altitudines varias metiri | 167 & seqq. | Aristoteles | 10 |
| Altimetria trigonometrica | 327 | Astrologia superstitioni deservit | 7 |
| Anaxagoras | 8 | Antipodes veteribus noti | 10 |
| Anaximander | 8 | Astrolabium | 150 |
| | | X x 2 | Assym- |

| | | | |
|--------------------------------------|------------|---|-------------|
| Asymptoti - - - | Pag. 294 | Complementi secans - - - | Pag. 297 |
| Axioma quid? - - - | 16 | Cotangens - - - | 297 |
| Axis sphaeræ - - - | 258 | Cubi soliditatem invenire - - - | 265 |
| Axis sectionum conicarum - - - | 286 | Cubum in sphaeram mutare - - - | 283 |
| B. | | Cubus quid? - - - | 264 |
| B asis quid? - - - | 139 | Cusanus Nicolaus - - - | 13 |
| Bathymetriæ problemata | | Cylindrum describere - - - | 257 |
| Trigonometrica - - - | 159 | Cylindri soliditatem invenire - - - | 267 |
| Beyerus - - - | 172 | Cyclois - - - | 227 |
| Brigii tabula - - - | 306 | D. | |
| Bouffole - - - | 151 | D efinitio quid? - - - | 16 |
| C. | | Democritus Abderites - - - | 9 |
| C æci regula - - - | 92 | Denominator fractionum - - - | 54 |
| Candalla Franciscus Fluffates - - - | 11 | Diagonalis parallelogrammum | |
| Cartesius - - - | 3 | in duas partes dividit - - - | 174 |
| Catena ferrea - - - | 152 | Diagonalis in motibus - - - | 175 |
| Cathetus quid? - - - | 139 | Diagonalis incommensurabilis | |
| Characteres arithmetici | | lateri quadrati - - - | 177 |
| a quibus inducti - - - | 13 & 18 | Diametrum ad circuli peripheriam - - - | 203 |
| Characteristici logarithmorum - - - | 305 | Diophantes Alexandrinus - - - | 12 |
| Centrum reflexionis - - - | 286 | Differentia terminorum - - - | 130 |
| Centrum arcus invenire - - - | 214 | Dignitas quid - - - | 101 |
| Chordæ habent se ut arcus - - - | 218 | Digitus divisio - - - | 133 |
| Chordæ quid? - - - | 286 & 296 | Distantias varias invenire - - - | 154, & seq. |
| Circinus proportionalis - - - | 153 | Divisio simplex - - - | 39 |
| Circulus quid? ejusque partes - - - | 196 | in compositis - - - | 52 |
| Circuli concentrici - - - | 202 & 197 | in fractis - - - | 57 |
| excentrici - - - | 197 | Divisionis signum algebraicum - - - | 44 |
| Circuli se in puncto tangunt - - - | 198 | Divisionis Euthymetricæ pro- | |
| Circulorum inter se proportio - - - | 217 | blemata - - - | 238 |
| Circulus figura maximi spatii - - - | 220 | Divisionis stereometricæ problemata - - - | 276 |
| Circulum multiplicare - - - | 221 | Dodecagonum construere - - - | 186 |
| Conum in plano delineare - - - | 256 | Dodecaëdron quid? - - - | 246 |
| Conicæ sectiones - - - | 285 | in plano describere - - - | 250 |
| Cochleam describere - - - | 226 | rete ejusdem - - - | ibid. |
| Complementi sinus, vel cosinus - - - | 296 | Dodecaëdri soliditatem invenire - - - | 266 |
| Combinationes numerorum - - - | 79, & 88 | Doliorum Stereometria - - - | 270 |
| Compassus subterraneus - - - | 171 | Doliorum fluida mensurare - - - | 271 |
| Computus decimalis - - - | 108 | E. | |
| Collosam superficiem metiri - - - | 163 | E uclides mathematicus - - - | 11 & 146 |
| Corpora regularia quinque - - - | 251 | Ejusdem elementa - - - | 11 |
| Corporum proportiones - - - | 278, & 284 | Eurc- | |

| | Pag. | | Pag. |
|--|-------|--|-------|
| Europæi a sinistra versus dextram scribunt - - - - | 24 | Hypothenusa quid? - - - - | 139 |
| Ellipsis - - - - 285, & seqq. | | Hyperbole - - - - | 293 |
| Enneagonum construere - - - - | 186 | Hypothesis quid - - - - | 16 |
| Euthymetriæ problemata - - - - | 153 | Hypsicles - - - - | 11 |
| Exponens rationis distinguitur a quoto - - - - | 73 | I. | |
| Exponens dignitatum - - - - | 101 | I chnographicas mappas vel majores, vel minores reddere - - - - | 193 |
| F. | | Icosædron quid? - - - - | 246 |
| F allacia regulæ lineæ in mensurando campos - - - - | 161 | in plano formare - - - - | 250 |
| Falsi regula quid? - - - - | 93 | Ejusdem rete describere - - - - | ibid. |
| Falsi regula duplex - - - - | 94 | Ejus soliditatem invenire - - - - | 266 |
| Figuræ minuendi, vel ampliandi variæ praxes - - - - 194, & 195 | | in parallelepipedum mutare - - - - | 282 |
| Figuræ tres sunt, quæ compositæ planum efficiunt - - - - | 195 | Inæqualia quæ? - - - - | 18 |
| Fractiones reducere - - - - | 54 | Intervallum - - - - | 196 |
| Fractiones decimales - - - - | 109 | Josephus Flavius notatur - - - - | 6 |
| Fractionum decimalium notæ - - - - | 109 | Jubal musicam excoluit - - - - | 6 |
| Fluvii, aut piscinæ latitudinem metiri - - - - | 161 | Isoceles - - - - | 138 |
| Fluvium, aut torrentem in charta delineare - - - - | 162 | L. | |
| Focus ellipseos - - - - | 288 | L atus quadrati duplum constituit quadratum quadruplum - - - - | 188 |
| G. | | Latera trianguli æqualia habent æquales oppositos angulos - - - - | 141 |
| G eometrica subterranea - - - - | 170 | Lemma quid? - - - - | 16 |
| Goniodictes - - - - | 171 | Leubnicus - - - - | 13 |
| H. | | Libella fossorum - - - - | 171 |
| H ecatombe Pythagoræ - - - - | 146 | Lineas duas medias proportionales invenire - - - - | 128 |
| Henoch architectus - - - - | 6 | Ope circini proport. - - - - | 139 |
| Heptagonum - - - - 173, & 186 | | Per numeros - - - - | ibid. |
| Hexapeda quid? - - - - | 133 | Lineæ quatuor discrete proportionales - - - - | 130 |
| Hexagonum quid? - - - - | 173 | Logarithmus quid - - - - | 304 |
| describere - - - - | 186 | Logarithmorum species - - - - | 305 |
| Hexagonum circulo inscribere - - - - | 224 | Lythostroton formare - - - - | 215 |
| Hexædron - - - - | 246 | M. | |
| Horizontalis linea in nivellatione declinat - - - - | 165 | M arinonius Jacobus laudatus - - - - 152, 163, 194 | |
| Ejus declinatio - - - - | ibid. | Mappæ geographicæ generales - - - - | 336 |
| | | Particulares - - - - | ibid. |
| | | Matheseos definitio - - - - | 5 |

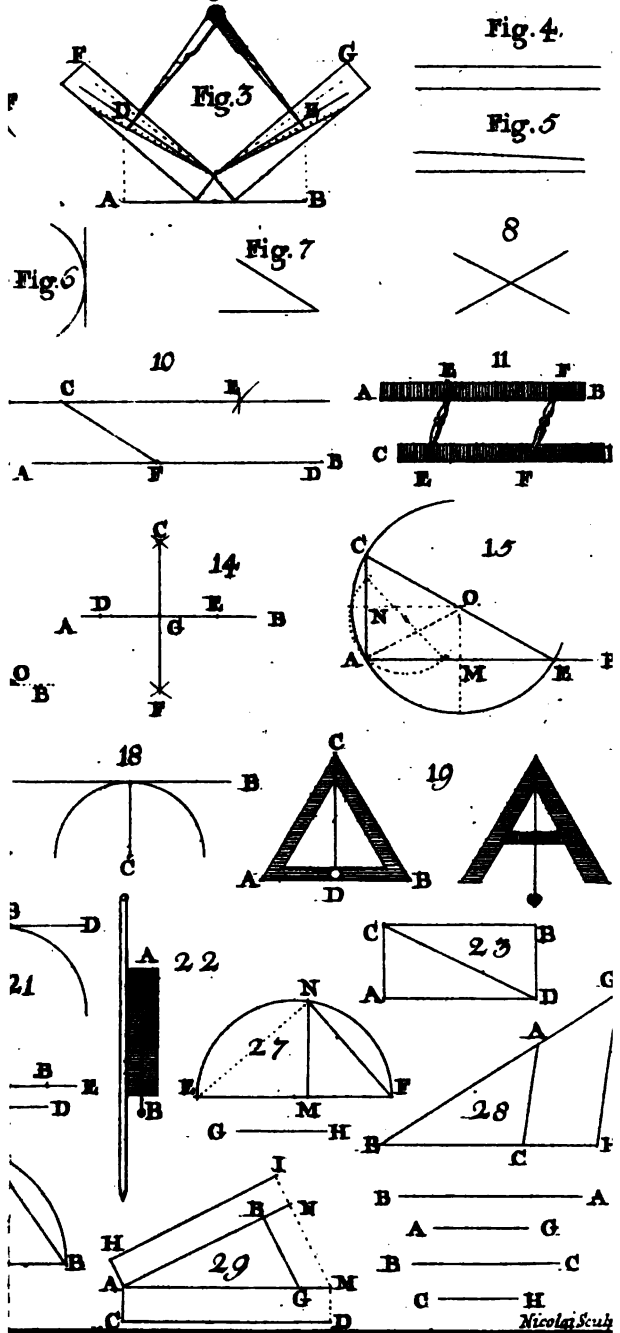
| | Pag. | | Pag. |
|---------------------------------------|--------------|---|----------|
| dignitas | ibid. | Numeratio, ejusdemque hypothesis | 23 |
| Mâthesis juventuti apud veteres tradi | | Numeri exponentes | 37 |
| solita | 10 | Numeri coëfficientes | 38 |
| Matheſeos fata | 12 | Numerator fractionum | 54 |
| Diviſio | 14 | Numerum geometrice proportionalem | |
| Utilitas | ibid. | invenire | 78, & 79 |
| Mensula Prætoriana | 152 | | |
| Methodus | 15 | O. | |
| Metamorphosis Euthymetrica quid? | | O ctoëdron quid? | 16 |
| ejusdemque problemata 240, & seqq. | | in plano formare | 249 |
| Metamorphosis stereometricæ pro- | | Octoëdri rete describere | 251 |
| blemata | 280 | Octoëdri soliditatem invenire | 266 |
| Milliarium variæ mensuræ | 132 | Octogonum | 173 |
| Monomia quid? | 26 | Octogonum regulare formare | 186 |
| Mons nequit plures arbores capere, | | Ordinatæ | 286 |
| quam plana illius basis | 166 | Ovalem figuram describere | 224 |
| Montes secundum planam superficiem | | | |
| mensurantur | ibid. | P. | |
| Müllerus Joannes | 15 | P arabola quid? | 289 |
| Murorum soliditatem invenire | 273 | Parabolam describere | 290 |
| Multiplicatio simplex | 31 | Parabolæ segmentum determinare | 291 |
| in compositis | 52 | Parallelepipedo rete describere | 249 |
| in fractis | 57 | Parallelepipeda sunt in triplicata ratio- | |
| Multiplicatio algebraica fit tribus | | ne laterum homologorum | 255 |
| modis | 38 | Parallelogrammum quid? | 173 |
| Multiplicatio decimalis | 111 | Parallelogramma habent se in duplica- | |
| Multiplicationis signum | 31 | ta ratione baseos, & altitudinis | 179 |
| Proba | 32 | Parallelogrammum describere | 185 |
| Multiplicare sola mente | 48 | Parallelogrammum graphicum | 194 |
| Multiplicationis Euthymetricæ pro- | | Parameter | 287 |
| blemata | 236 | Perimeter sphaeræ | 258 |
| Multiplicationis stereometricæ pro- | | Passus duplex est | 132 |
| blemata | 275, & seqq. | Pappus | 12 |
| | | Parmenides | 9 |
| N. | | Pentagonum regulare describere | 185 |
| N Eperus Joannes | 13, 295 | Circulo inscribere | 222 |
| Neperianæ tabulæ | 34 | Pentagoni centrum invenire | 223 |
| Newtonus | 13 | Pertica quæ mensura? | 132 |
| Nihil medium tenet inter quantitates | | Pes quæ mensura? | 133 |
| positivas, & negativas | 31 | Pedes varii | ibid. |
| Nivellatio quid? | 164 | Peurbachius Georgius | 13 |
| Ejus methodus, & praxis | ibid. | Philolaus | 9 |
| Noëmi scientia | 6 | Peripheria quid? | 196 |
| | | | Ejus |

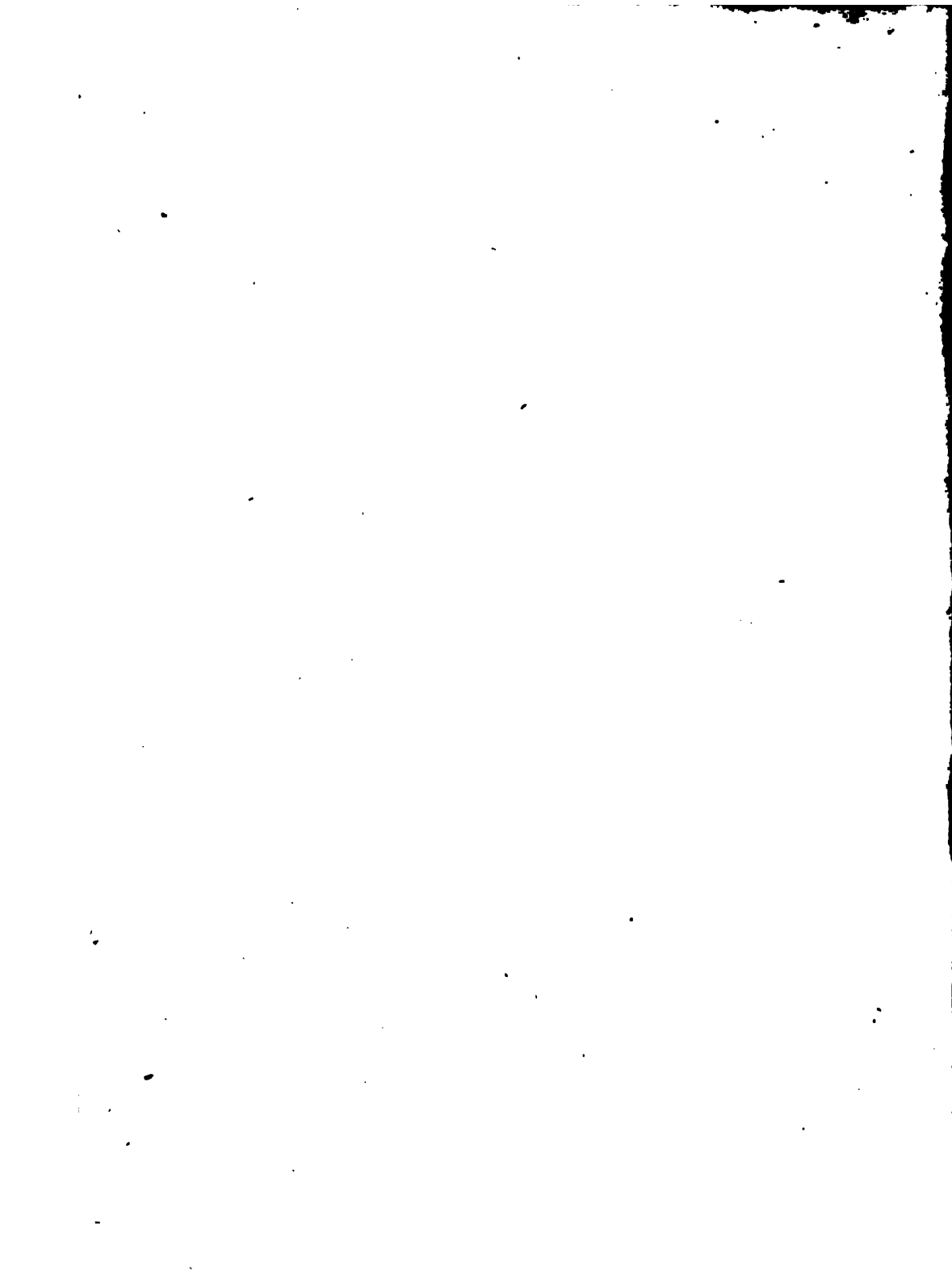
I N D E X.

351

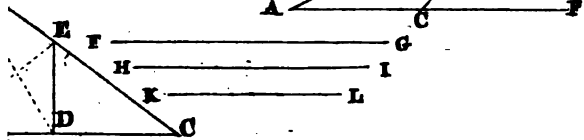
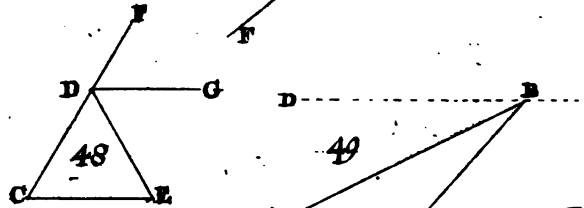
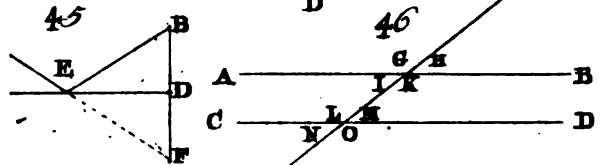
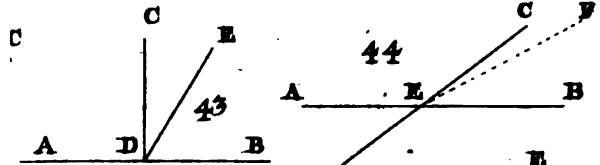
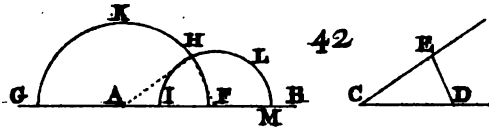
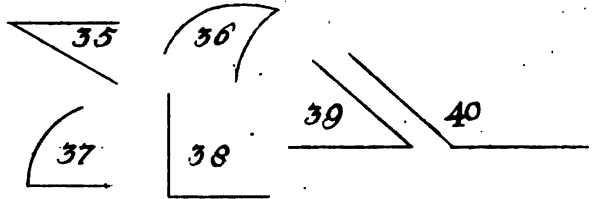
| | Pag. | | Pag. |
|---|---------|------------------------------------|---------|
| Ejus divisio - | 197 | Quadrati numeri signum - | 101 |
| Platonis mathesis - | 9 | Quadratum construere - | 184 |
| Platearum latitudinem invenire - | 170 | Quadrati aream metiri - | 189 |
| Polygoni centrum invenire - | 187 | Quadratum multiplicare - | 191 |
| Polygonum omne in triangula resol- vitur - | 191 | Circulo inscribere - | 222 |
| Polygonum multiplicare - | 192 | Quadrati latus ad diametrum - | 245 |
| Polygona pauciorum laterum sunt majora - | 219 | Quadrans quid - | 151 |
| Polygonum circulo inscribere - | 225 | Quotus numerus - | 40 |
| Polynomia - | 25 | R. | |
| Postulatum - | 16 | R Adius circuli - | 196 |
| Potentia - | 101 | Radix quid? - | 100 |
| Pratum dividere - | 179 | Radicem quadratam extrahere - | 103 |
| Prisma in plano describere - | 252 | Cubicam - | 106 |
| Ejusdem rete describere - | ibid. | Ratio arithmetica, & geometrica - | 72 |
| Prisma omne continet tres pyramides | 253 | Ratio composita - | 74 |
| Procli specula caustica - | 12 | dupla - | ibid. |
| Progressio geometrica continua, discreta - | 73 | Duplicatae rationis - | ibid. |
| Progressio arithmetica - | 72 | subduplicata - | 75 |
| Proportio arithmetica - | 72 | inversa - | 79 |
| Proportio æqualitatis, & inæquali- tatis - | 74 | alterna - | ibid. |
| rationalis, & irrationalis - | ibid. | reciproca - | ibid. |
| Problema quid? - | 16 | Rectangulum - | 172 |
| Problemata analyseos triangulorum rectangulorum - | 309 | Regula trium, seu proportionis - | 59 |
| obliquangulorum - | 320 | inversa - | 62 |
| Problema Deliacum - | 277 | de quinque - | 65 |
| Ptolomæus Claudius - | 11, 295 | Regula trium fundatur in Geometria | 175 |
| Pyramidem in plano describere - | 255 | Regiomontanus - | 13, 298 |
| Ejusdem rete - | 256 | alias Müllerus - | 13 |
| Pyramidis soliditatem invenire - | 265 | Reinholdus Erasmus - | 13 |
| Pyramidis truncatae - | 267 | Rheticus Joachimus - | 13 |
| Pyramidem in Prisma mutare - | 282 | Rhombus - | 173 |
| Pythagoras - | 9 | Rhombum construere - | 185 |
| | | Rhombi aream metiri - | 190 |
| | | Rhomboides - | 173 |
| | | Rhomboidem construere - | 185 |
| | | S. | |
| | | S Agitta - | 296 |
| Q uadratum arithmetico-cabalistico- magicum - | 86 | Scala geometrica - | 131 |
| Quadratum, seu rectangulum - | 172 | Scalenum triangulum - | 138 |
| Quadratus numerus - | 100 | Sector circuli - | 197 |
| | | Sectoris soliditatem invenire - | 269 |
| | | Se- | |

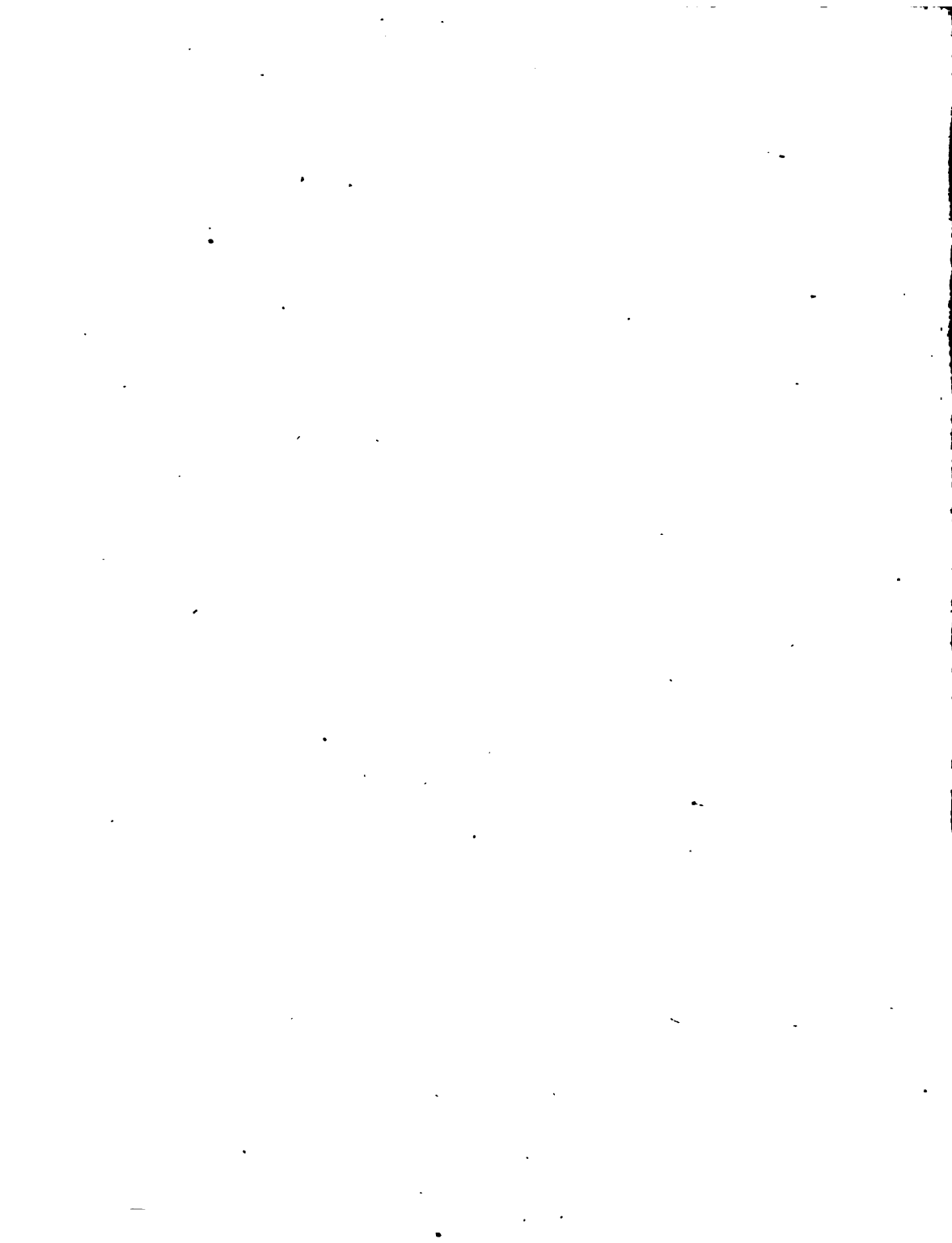
TAB. I. GEO. C



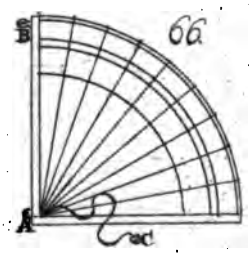
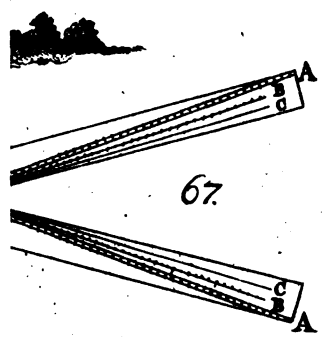
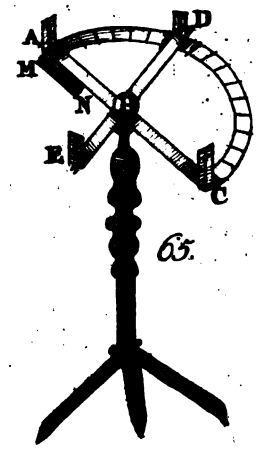
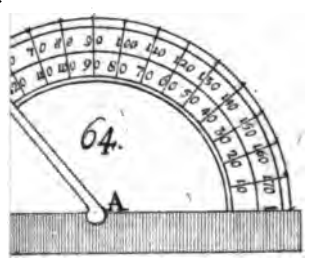
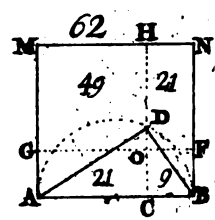
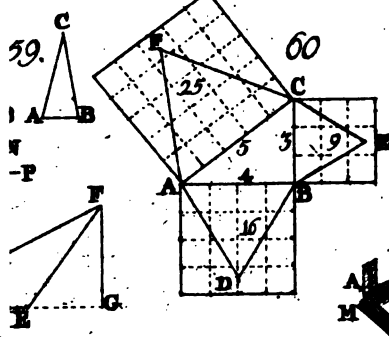
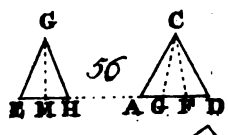
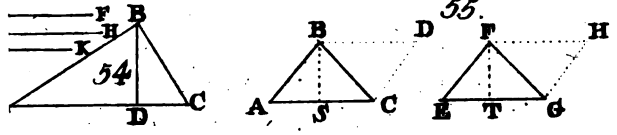


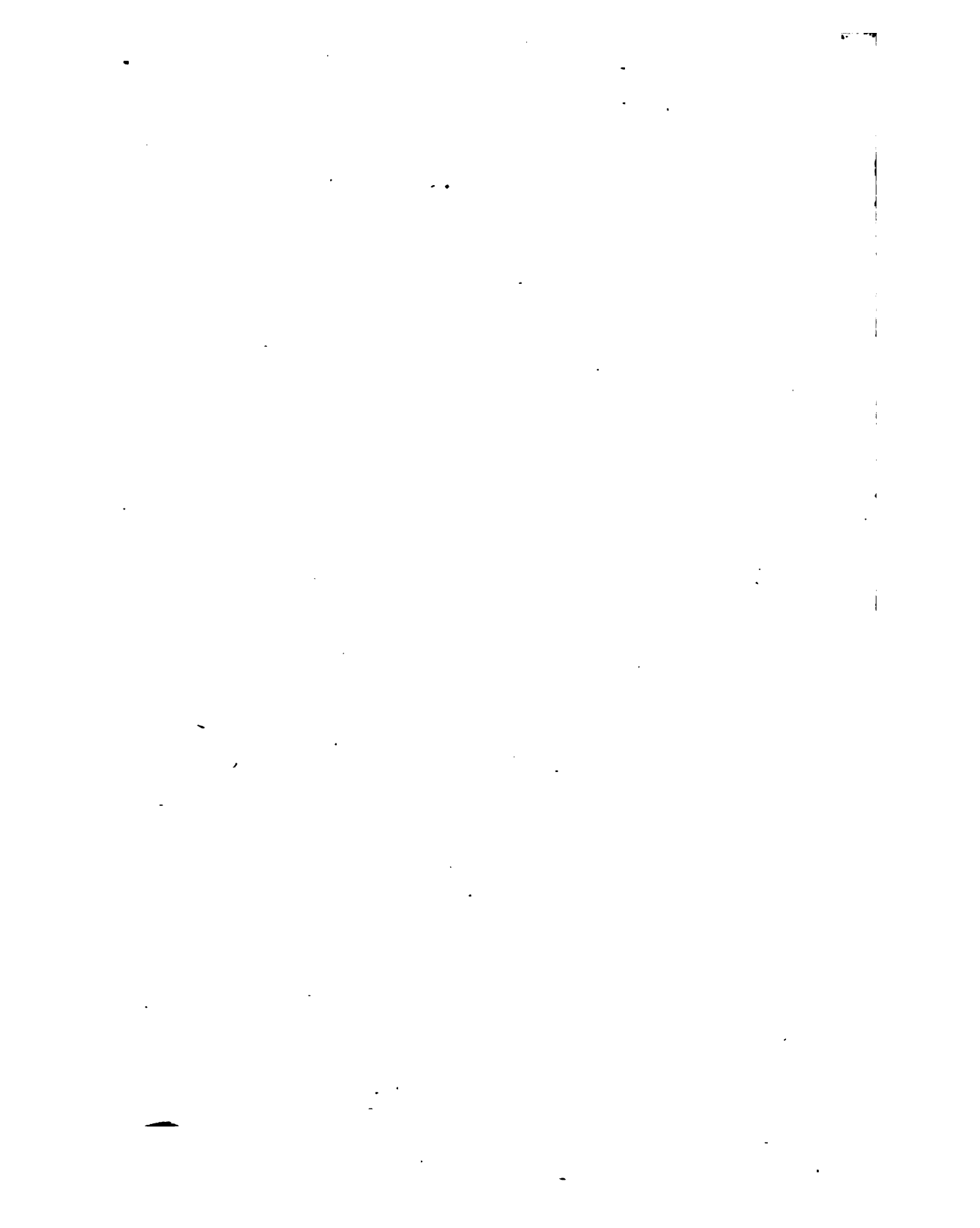
TAB. II. GEOM.



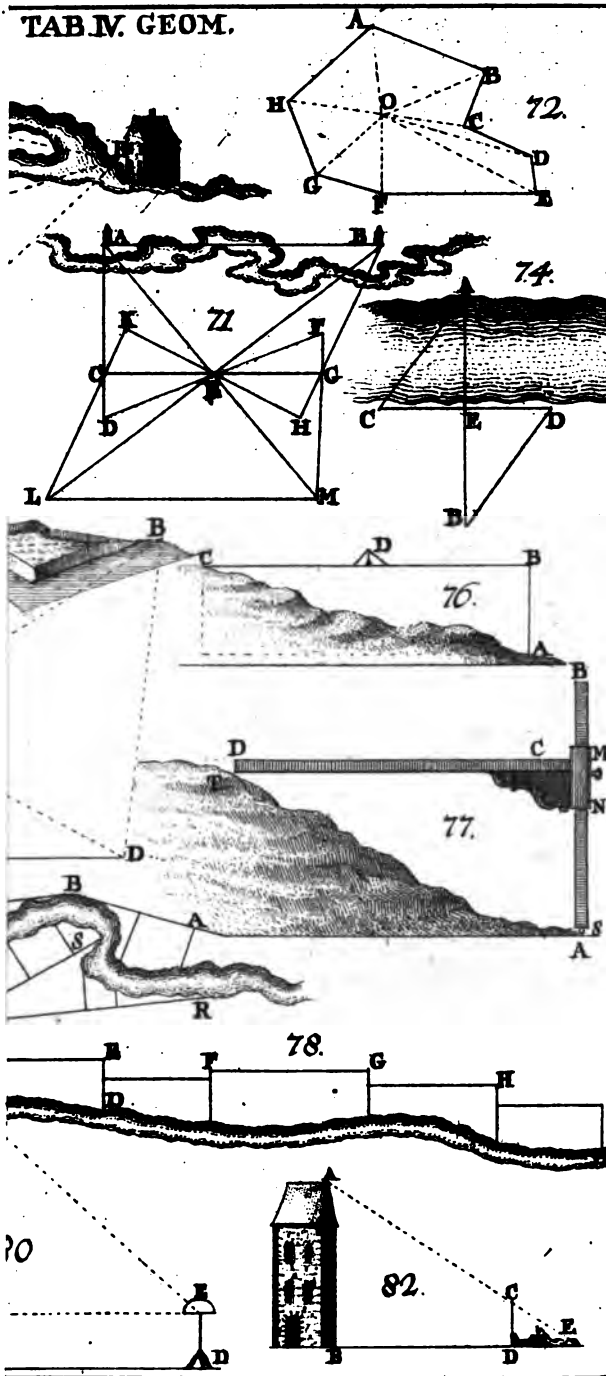


TAB. III. GEO.



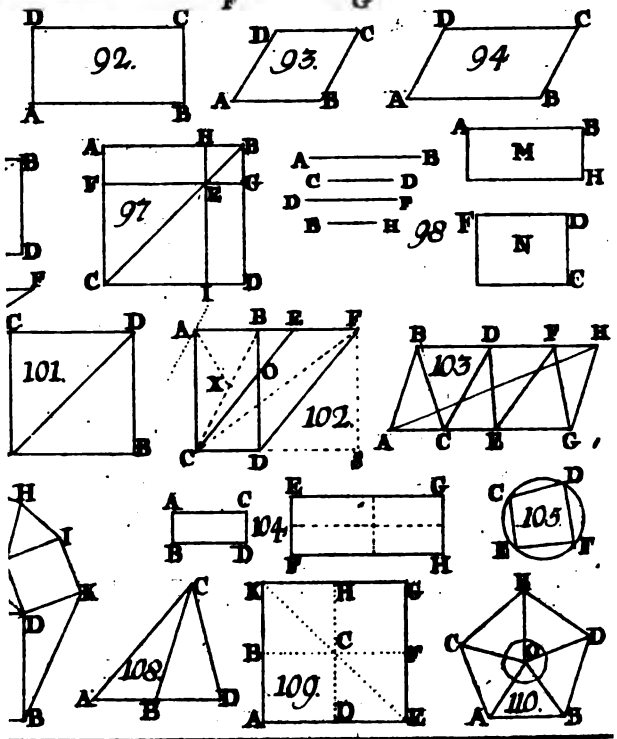
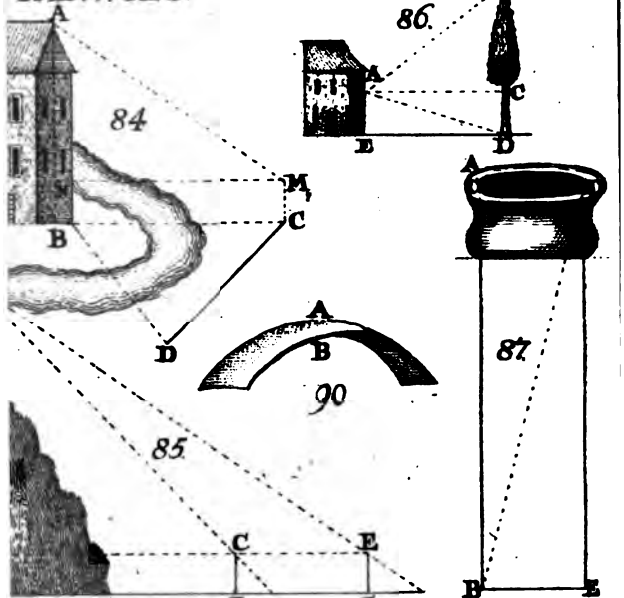


TAB. IV. GEOM.



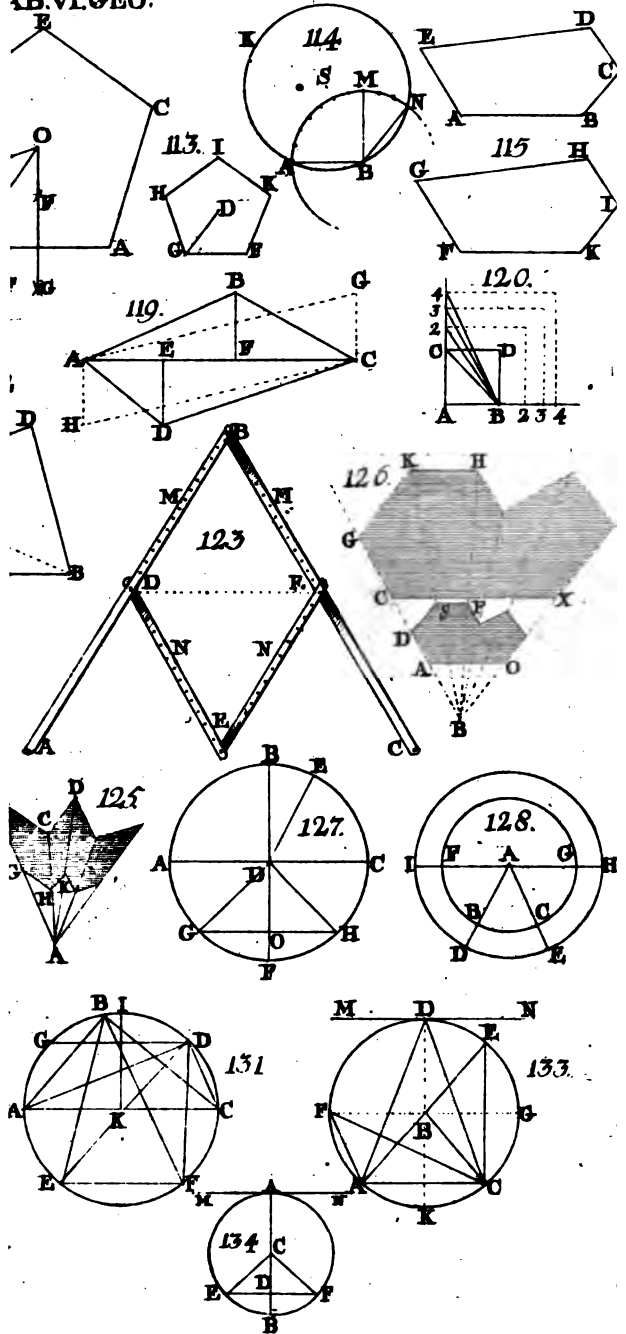


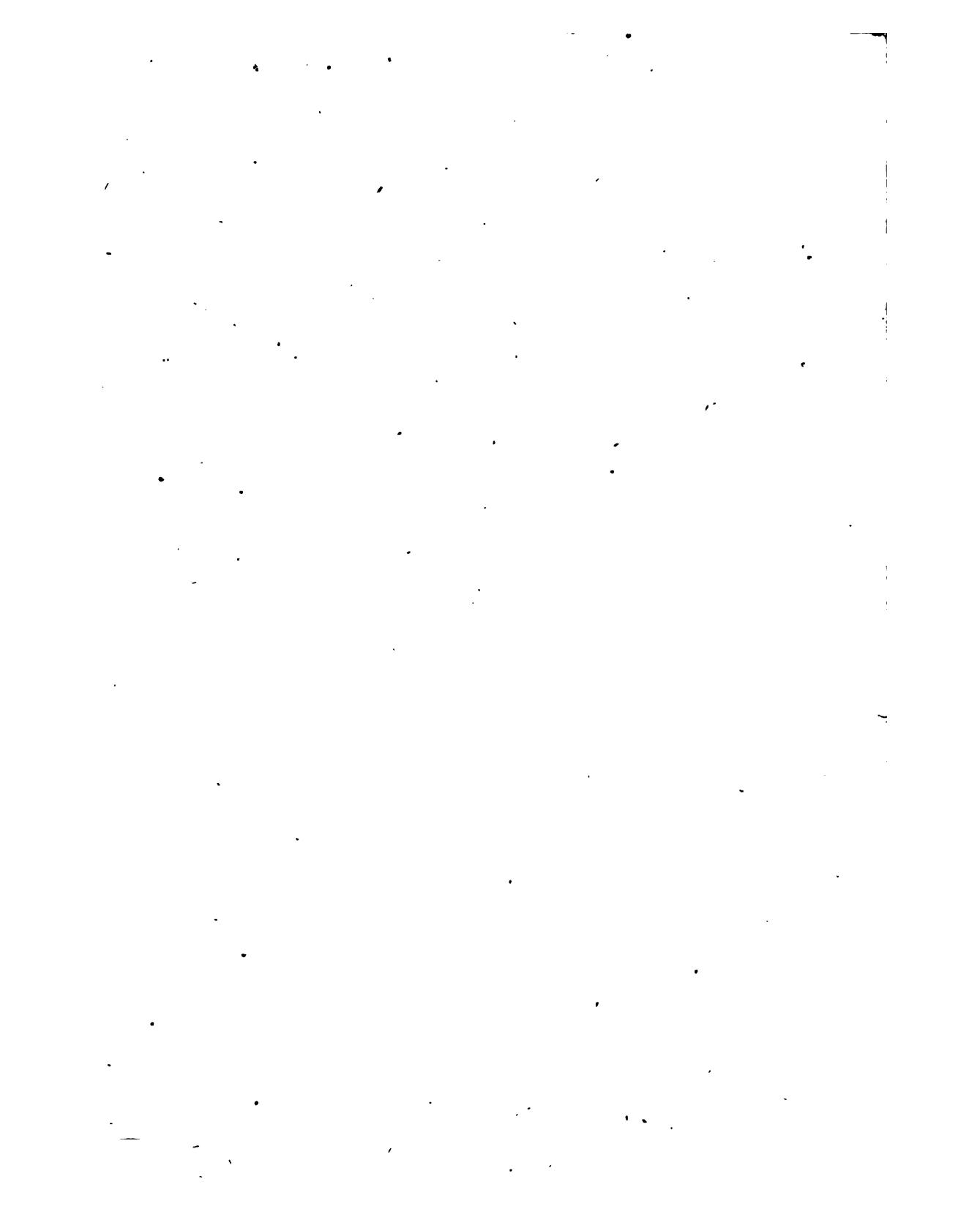
TAB. V. GEO.



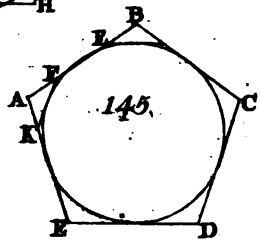
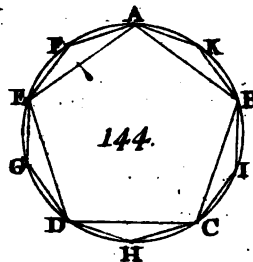
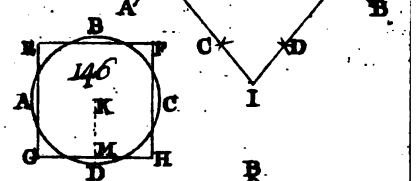
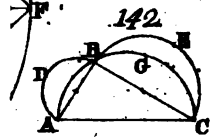
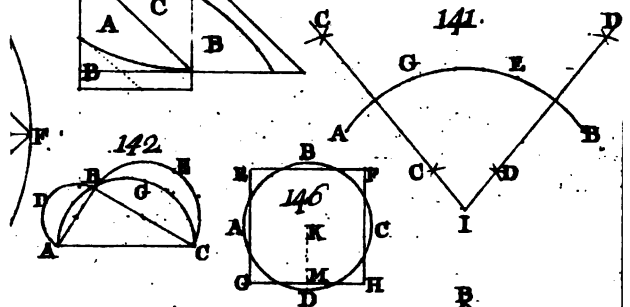
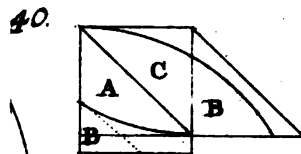
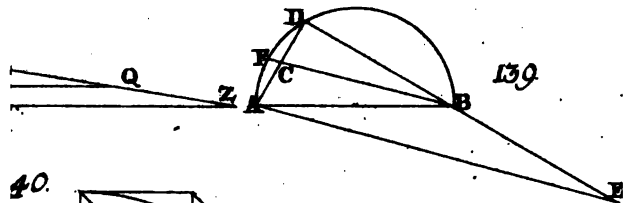
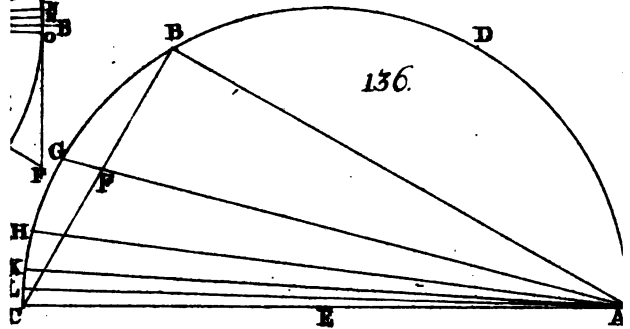
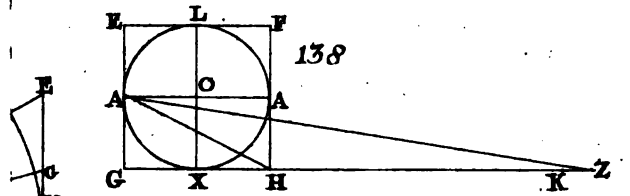


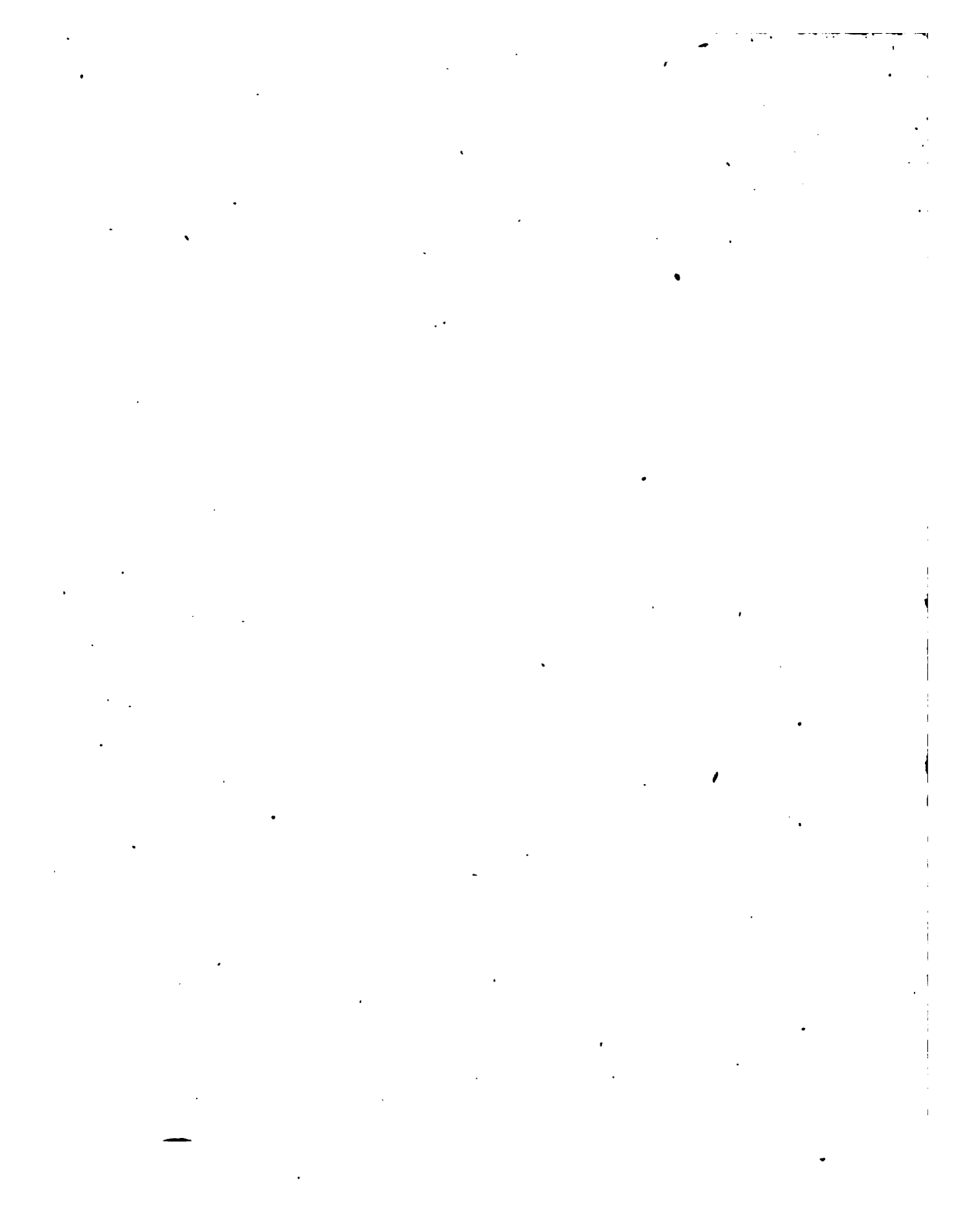
AB.VL.GEO.



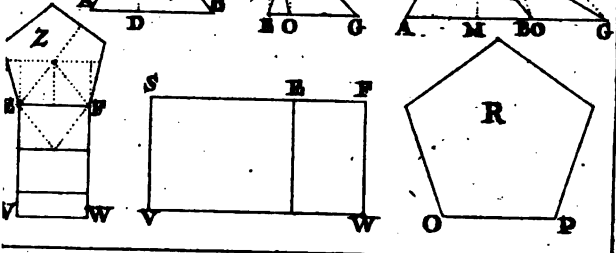
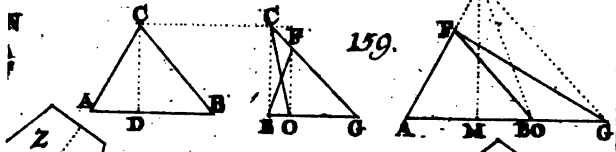
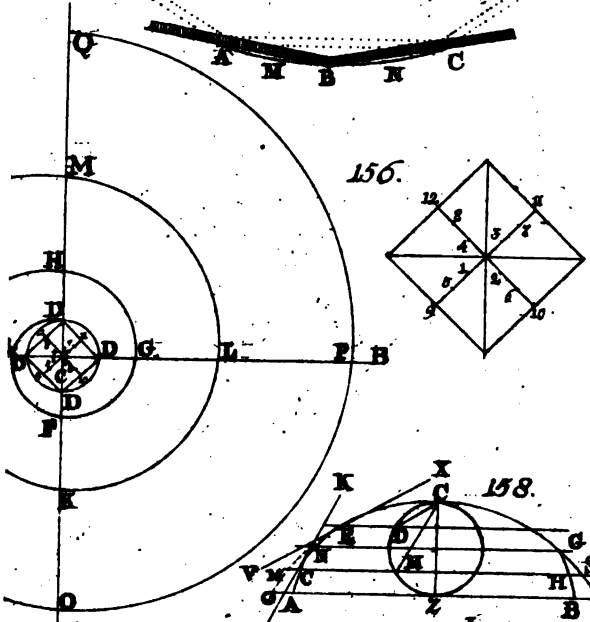
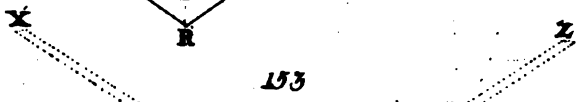
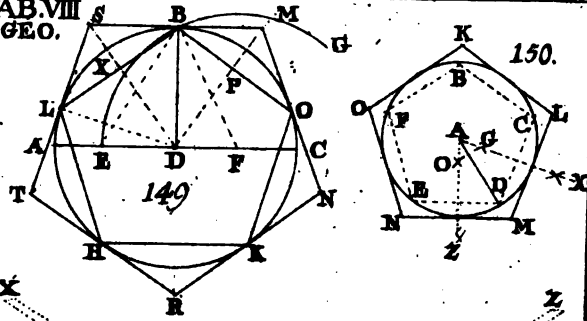


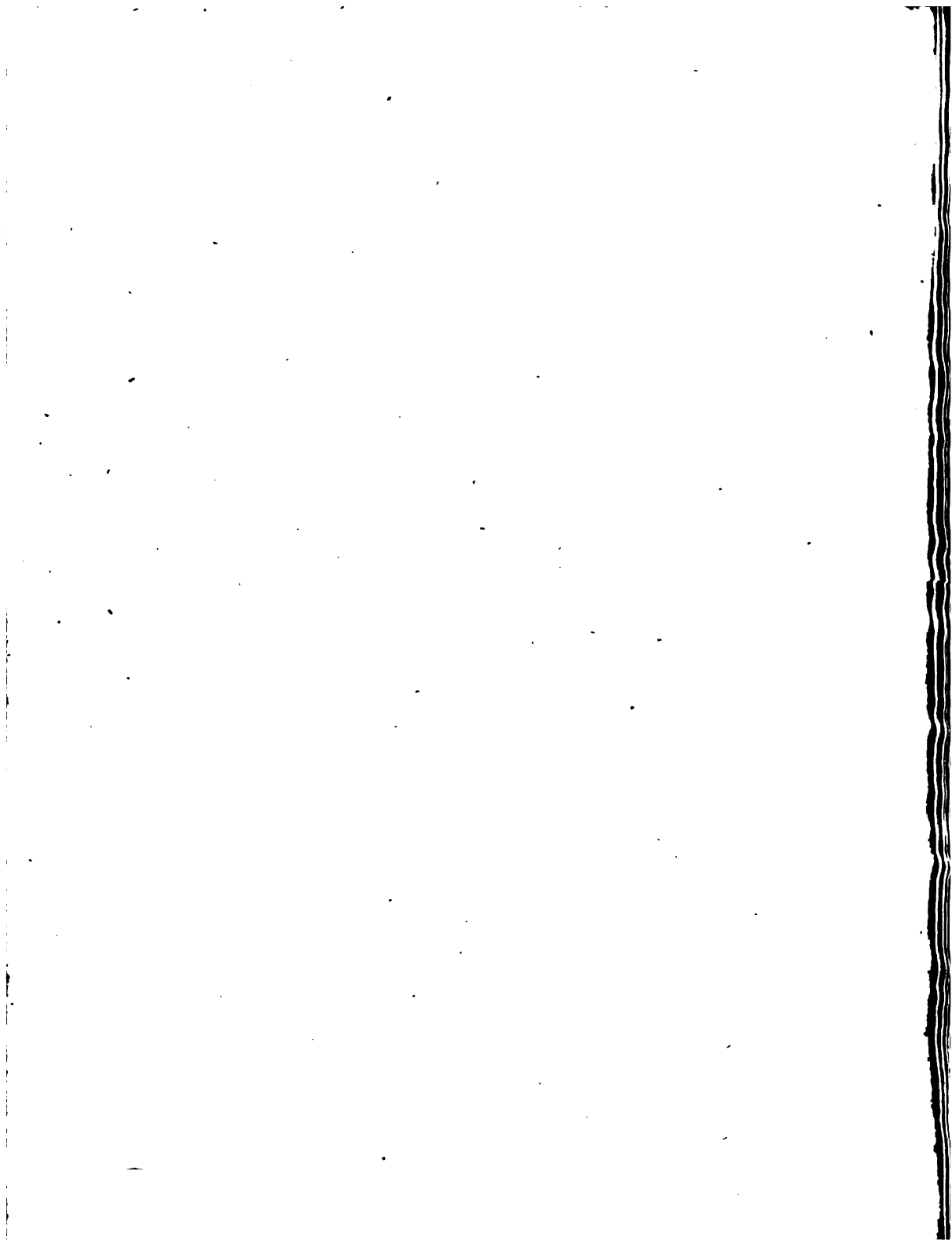
TAB.VII.GEOM.



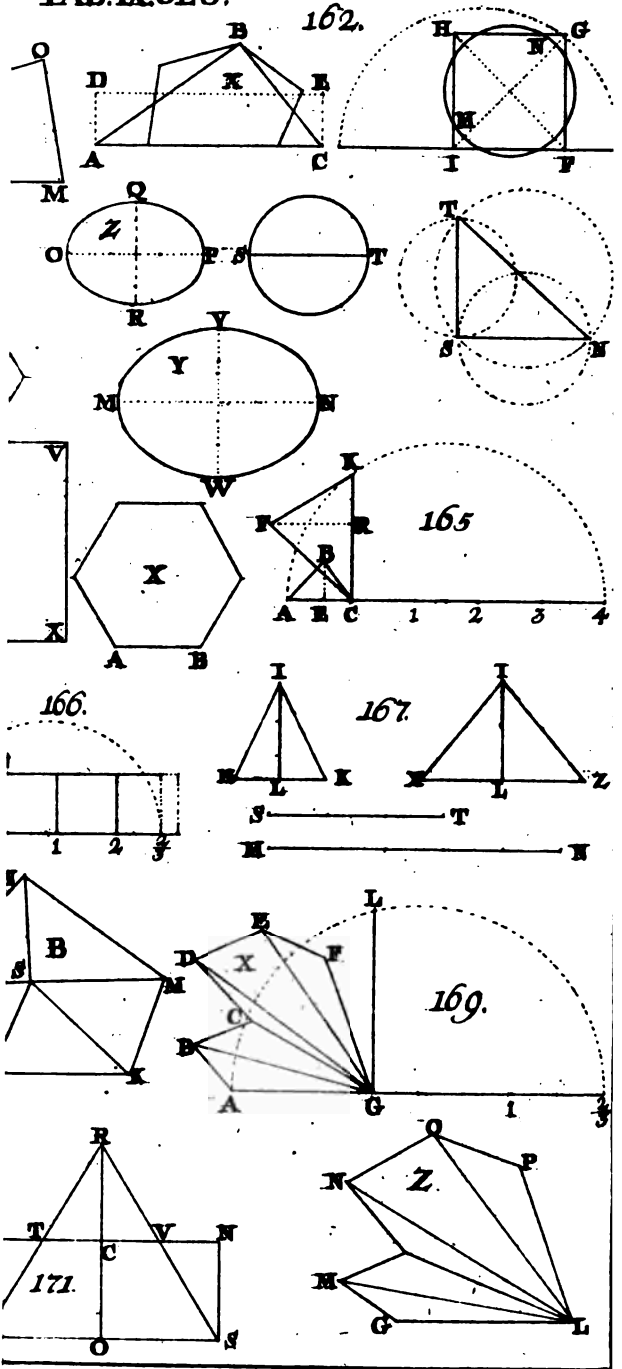


TAB. VIII
GEO.



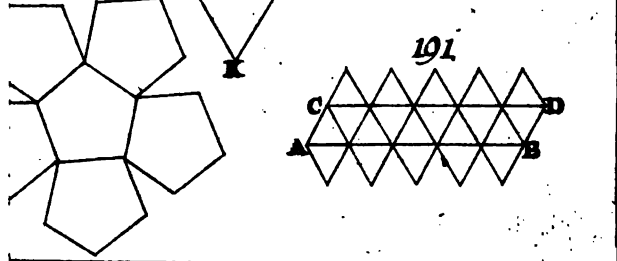
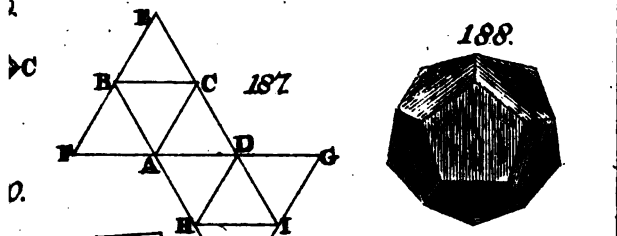
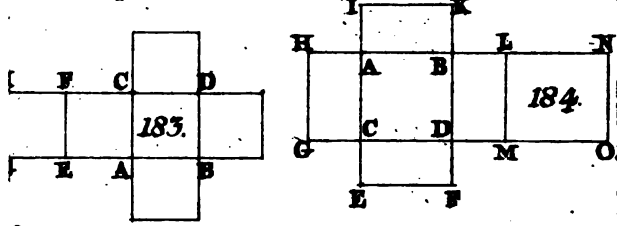
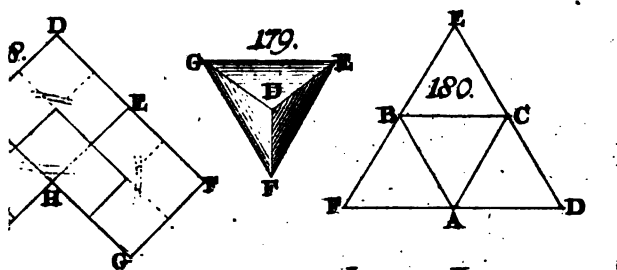
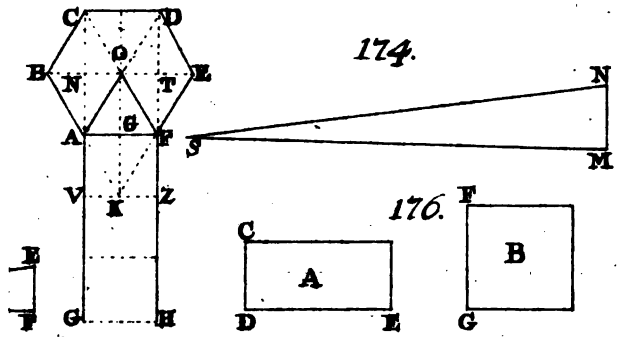


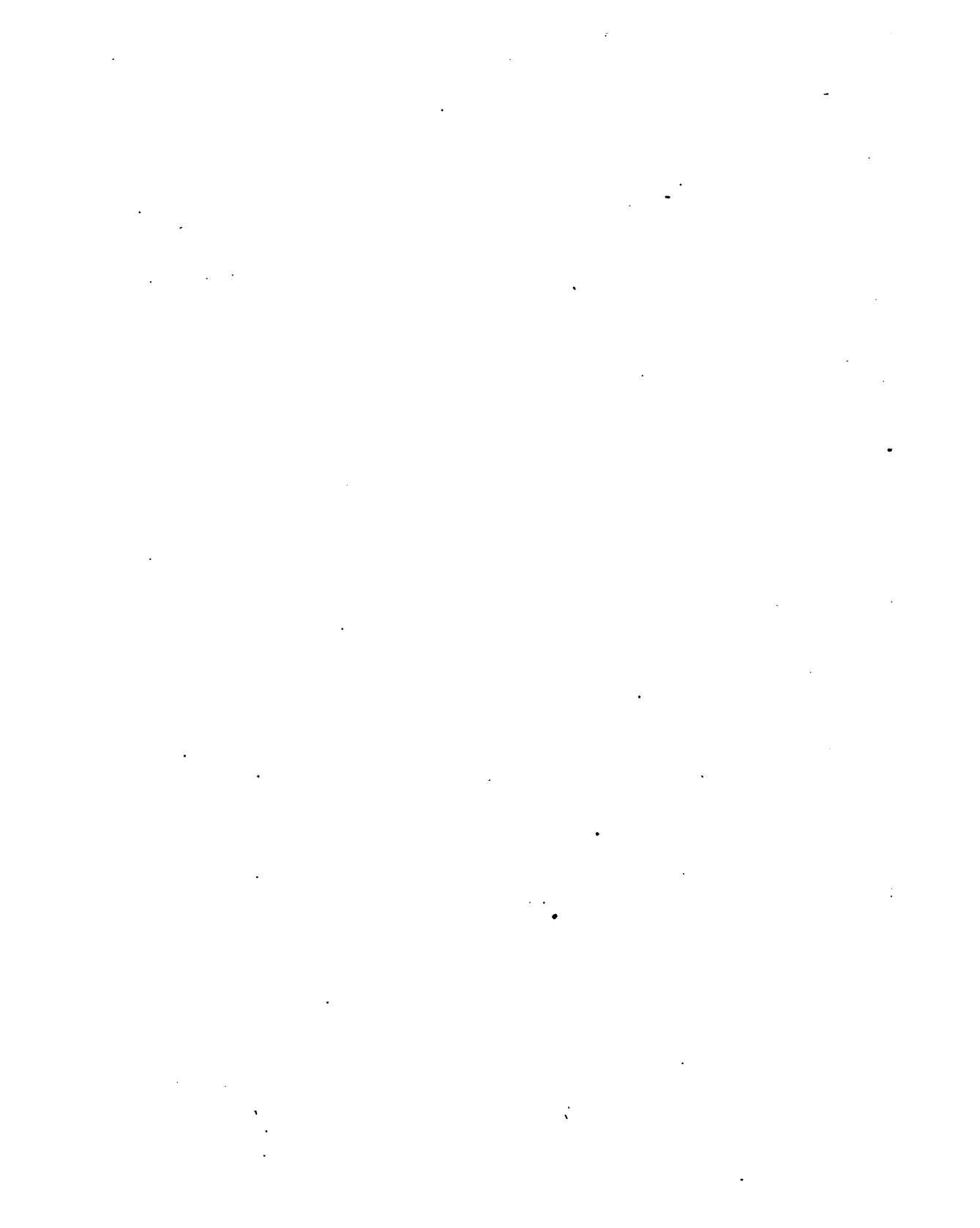
TAB. IX. GEO.



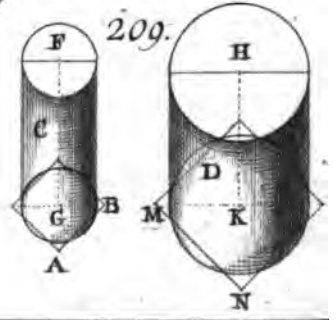
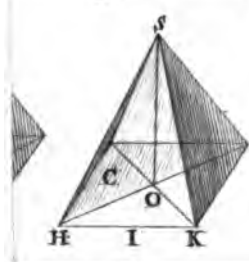
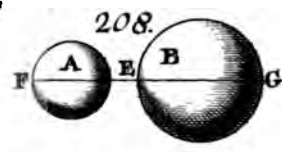
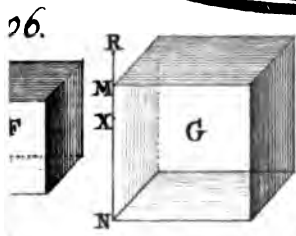
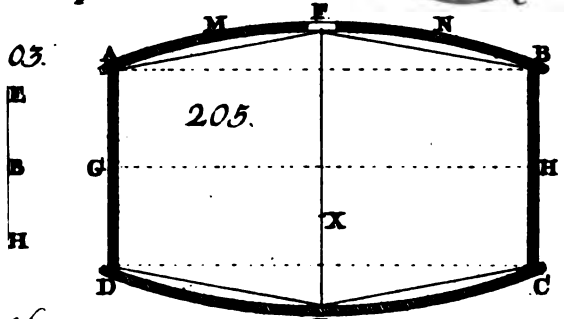
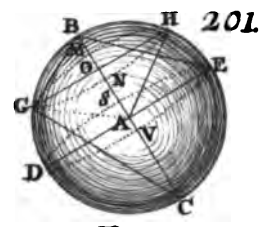
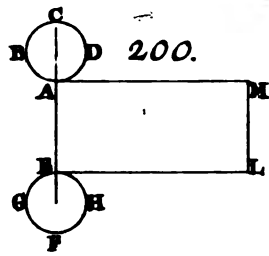
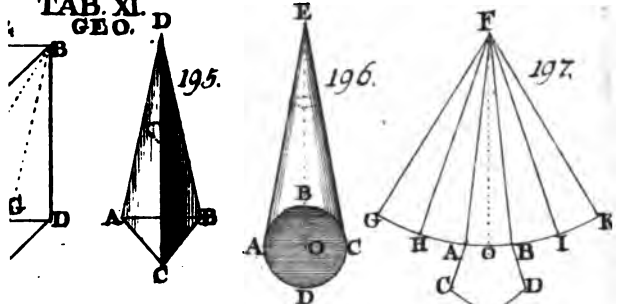


TAB. X GEOM.



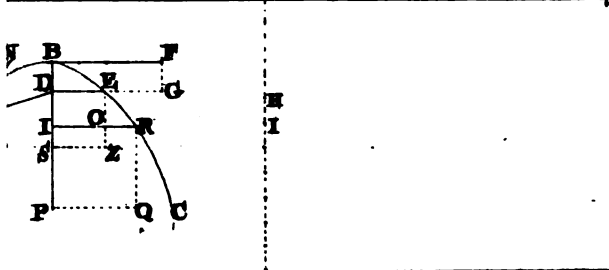
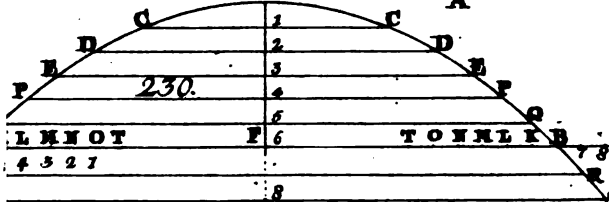
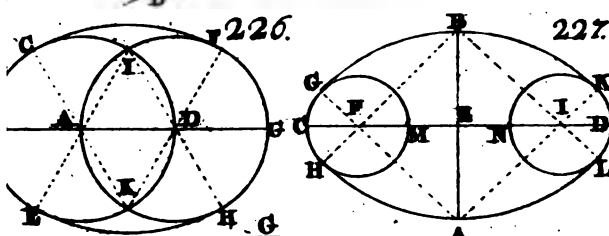
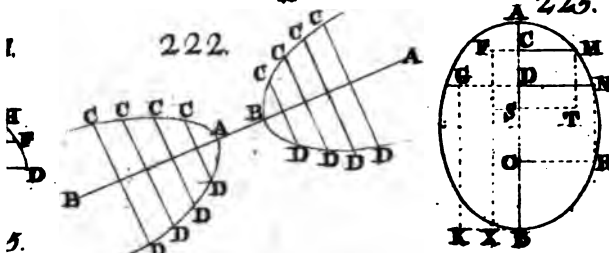
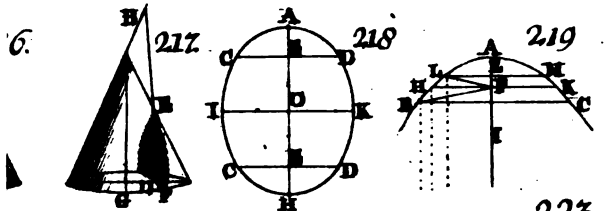
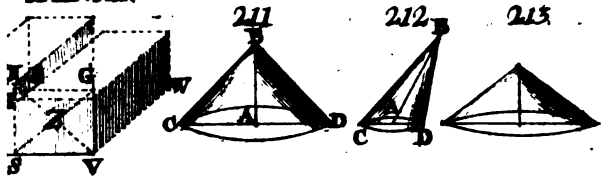


TAB. XI.
GEO.





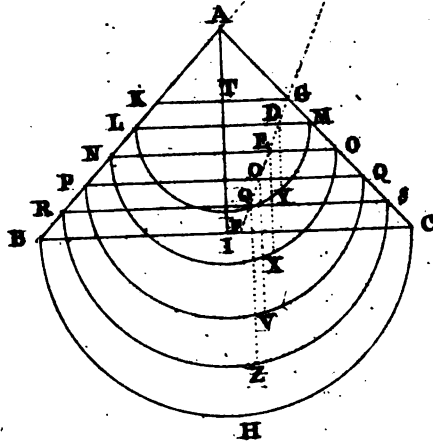
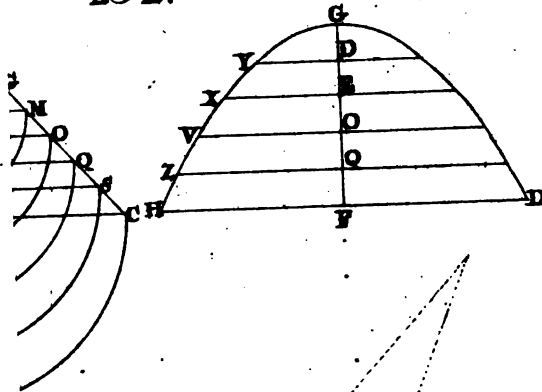
TAB. XII. GEO.



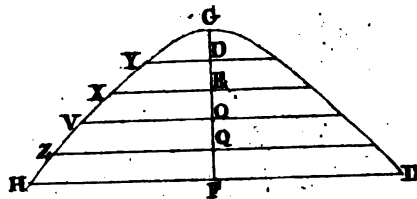


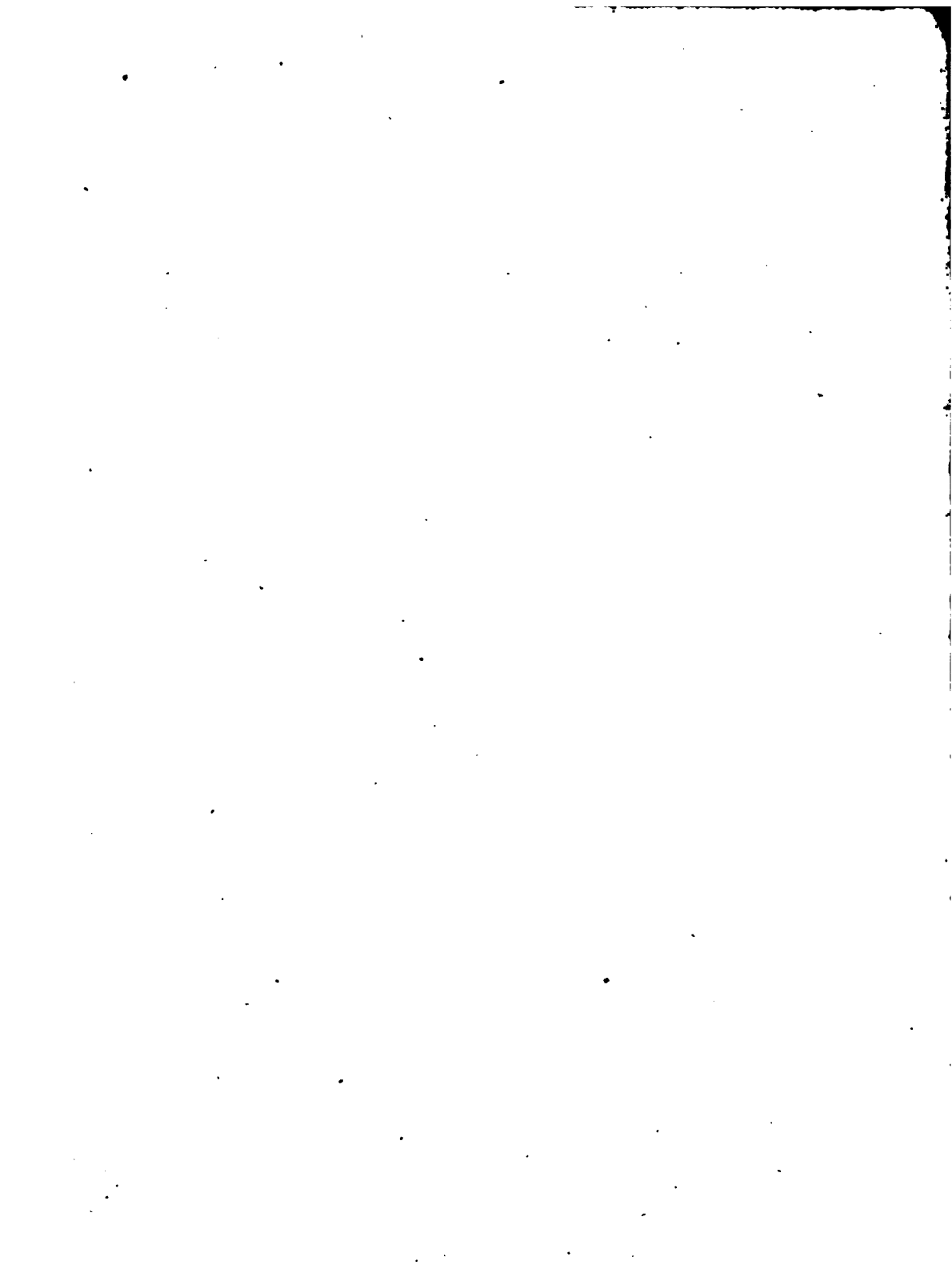
TAB XIII. GEOM.

232.

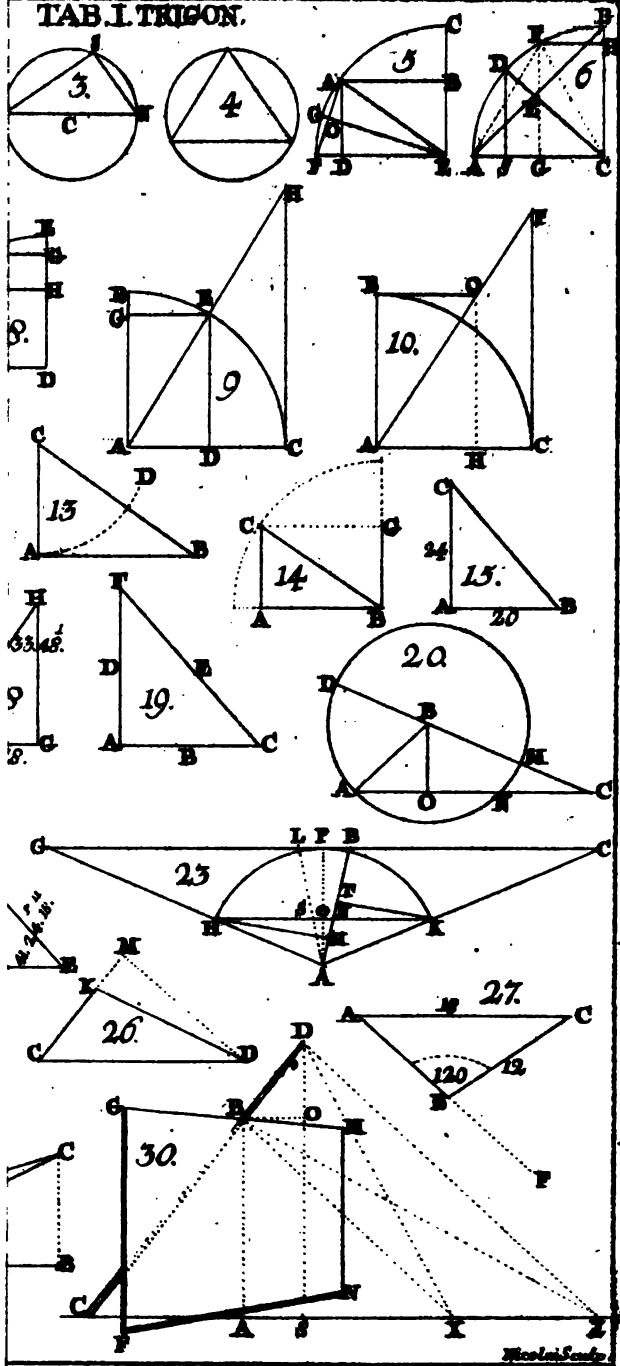


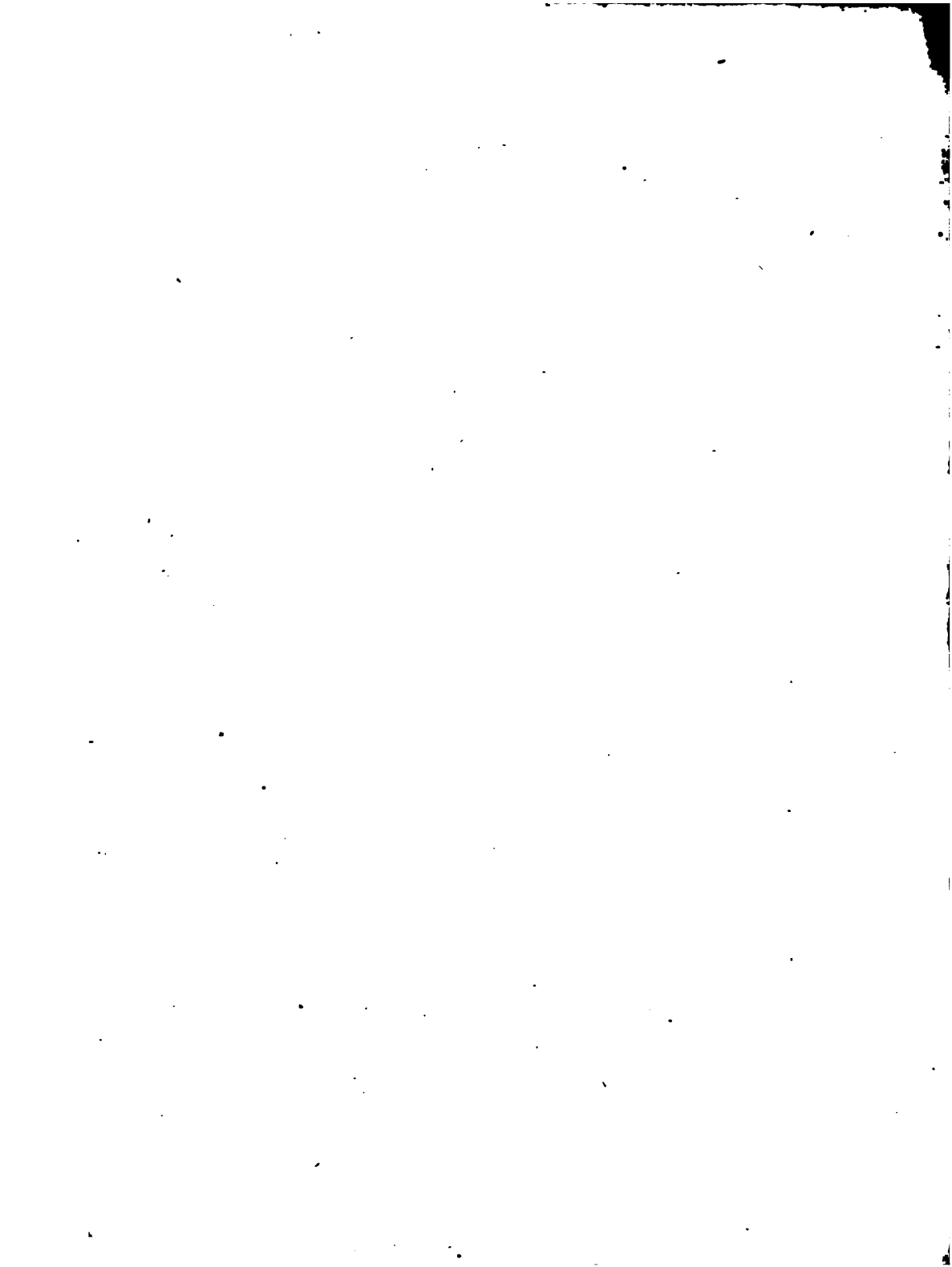
234.





TAB. I. TRIGON.





TAB. II. TRIGON.

